

INSTITUTO FEDERAL DO SUDESTE DE MINAS
GERAIS
CAMPUS - MANHUAÇU

Apostila

Matemática Aplicada

CARLOS ALBERTO SALAZAR MERCADO

Manhuaçu

2020

Sumário

Introdução	iv
1 Lembrando o estudado	2
1.1 Ordem para realizar operações matemáticas	6
1.2 Razão e Proporção	7
1.3 Regra de Três Simples	9
1.4 Regra de Três Composta	14
1.5 Porcentagem	18
2 Matemática Financeira	22
2.1 Juros Simples	24
2.2 Juros Compostos	28
2.3 Descontos	32
3 Unidades de Medida e suas conversões. Notação científica.	36
3.1 Notação Científica	36
3.2 Unidades de Medida e suas Conversões	38
4 Áreas e Volumes	43
4.1 Áreas	43
4.2 Volumes	61

SUMÁRIO	iii
5 Noções de Estatística Descritiva	90
5.1 Amostragem	90
5.2 Tipos de Dados	91
5.3 Tratamento de dados Qualitativos	93
5.4 Representação Gráfica e Medidas de Tendência Central	95
5.5 Medidas de Dispersão	109
Bibliografia	115

Introdução

Esta apostila tem como objetivo auxiliar o estudante do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais, campus Manhuaçu, na disciplina de Matemática Aplicada, a qual está sendo lecionada à distância por causa da situação atual que vivemos.

O ensino remoto emergencial, ERE, permite darmos continuação aos nossos estudos. Contudo, na primeira parte de esta disciplina lembraremos os assuntos já estudados de maneira presencial, antes da suspensão das aulas. Tais assuntos são: Operações matemáticas básicas e ordem de operação, regra de três simples direta e inversa e finalmente porcentagem.

Na segunda parte de este texto estudaremos um assunto de extrema importância, matemática financeira. Os conceitos básicos e exemplos desenvolvidos neste capítulo nos permitirão entender as transações financeiras que envolvem juros, tais como empréstimos no banco, desconto aplicado ao comprar um certo produto.

No capítulo três estudaremos as unidades de medida e suas conversões, conceitos a serem usados no cálculo de áreas de regiões planas e volumes de sólidos.

Finalmente, no capítulo quatro estudaremos uma introdução à estatística. Conceitos como média, moda, mediana e desvio padrão serão introduzidos. Estudaremos também como representarmos graficamente certos dados e a partir deles fazer uma análise para deduzir, por exemplo, qual foi o mês que uma empresa vendeu mais produtos, qual foi o mês e a cidade na qual houve mais casos positivos a certa doença. Estas informações são úteis na tomada de decisões, pense no caso dos governos e a doença COVID-19.

As referências bibliográficas usadas são dois dos livros texto indicados no projeto pedagógico do curso (PPC), eles são [\[4\]](#) e [\[3\]](#).

Ementa

Unidades de medidas e suas conversões. Notação científica. Figuras planas. Áreas e volumes dos principais sólidos. Média e desvio padrão. Regra de três simples. Porcentagem. Matemática financeira.

Capítulo 1

Lembrando o estudado

Neste capítulo vamos estudar o conjunto dos números que serão usados na nossa disciplina, assim como as operações matemáticas que podemos definir nestes conjuntos, tais como a soma, subtração, multiplicação e divisão. Depois estudaremos razões e proporções e usaremos isto para finalizar o capítulo estudando a regra de três simples e composta.

Definição 1.1. *Número* é um objeto da matemática usado para descrever quantidade, ordem ou medida. O conceito de número provavelmente foi um dos primeiros conceitos matemáticos assimilados pela humanidade no processo de contagem.

Existem diversos sistemas de numeração desenvolvidos pela humanidade, por exemplo o sistema dos Números Romanos ver figura 3.3 o qual foi, na sua época, bastante usado, porém apresentava dificuldades por exemplo usava letras para representar os números, e como os números são infinitos, teríamos dificuldades de representar números muito grandes. O sistema de numeração Árábico resolveu esta dificuldade e é o sistema usado na atualidade, ver figura 1.2.

1 = I	20 = XX	300 = CCC	4000 = M $\overline{V}$
2 = II	30 = XXX	400 = CD	5000 = $\overline{V}$
3 = III	40 = XL	500 = D	6000 = $\overline{VI}$
4 = IV	50 = L	600 = DC	7000 = $\overline{VII}$
5 = V	60 = LX	700 = DCC	8000 = $\overline{VIII}$
6 = VI	70 = LXX	800 = DCCC	9000 = $\overline{IX}$
7 = VII	80 = LXXX	900 = CM	10000 = $\overline{X}$
8 = VIII	90 = XC	1000 = M	
9 = IX	100 = C	2000 = MM	
10 = X	200 = CC	3000 = MMM	

Figura 1.1: Números Romanos

Definição 1.2. Um *conjunto* é uma agrupação, coleção, listagem de objetos. A relação básica entre um objeto e o conjunto é a relação de pertinência, denotada por $\in$.

Como podemos descrever os conjuntos?

- Extensão: listando os seus elementos (ideal para conjuntos pequenos e finitos).

Exemplo 1.3. O conjunto de dias da semana = {Segunda-feira, Terça-feira, Quarta-feira, Quinta-feira, Sexta-feira, Sábado, Domingo}

Neste exemplo podemos ver que o elemento do conjunto Segunda-feira pertence ao conjunto, isto pode ser escrito como:

$$\text{Segunda-feira} \in \text{Conjunto de dias da semana.}$$

- Compreensão: definindo uma propriedade de seus elementos.

Exemplo 1.4. O conjunto de seres humanos = $\{x ; x \text{ é ser humano} \}$

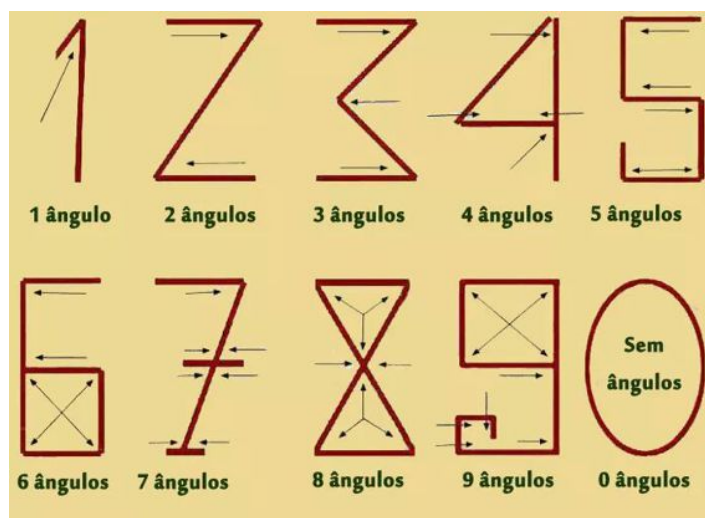


Figura 1.2: Números Arábicos

- Representação gráfica: usando Diagramas de Venn.

Na figura 1.3 estão representados os conjuntos numéricos que serão usados nesta disciplina, eles são:

1. O conjunto dos números naturais, representado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100, 101, \dots\},$$

onde $\dots$ representa que a sequência de numeração continua, este é talvez o primeiro conjunto com o qual temos contato quando aprendemos a somar quantidades, por exemplo, se tenho duas maçãs e compro 4 maçãs, terei 6 maçãs.

2. O conjunto dos números inteiros representado por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

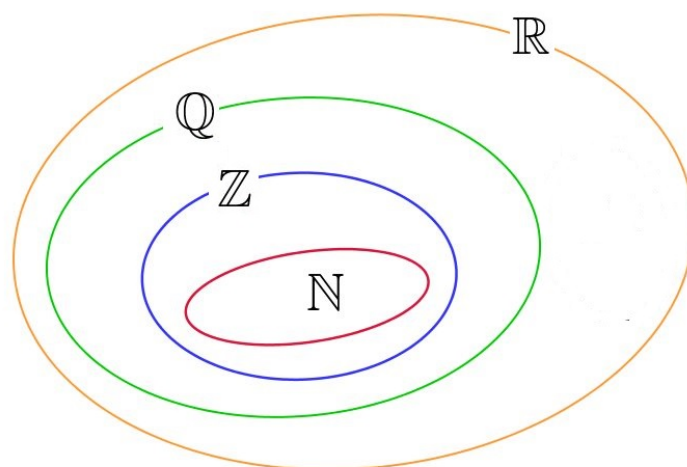


Figura 1.3: Conjuntos de Números

é o conjunto que contém os números naturais, $\mathbb{N}$, os naturais negativos e o número zero. Este conjunto é útil quando queremos subtrair quantidades pertencentes ao conjunto $\mathbb{N}$, por exemplo, se tenho 10 reais e devo 20, na realidade tenho $10 - 20 = -10$ reais.

3. O conjunto dos números racionais aparece quando queremos dividir quantidades inteiras(pertencentes a $\mathbb{Z}$), e é denotado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Por exemplo se temos uma pizza e queremos dividir em partes iguais para três pessoas, cada pessoa comerá $\frac{1}{3}$ da pizza.

4. O conjunto dos números reais denotado por $\mathbb{R}$ contém todos os números citados acima, naturais, inteiros, racionais e também o conjunto de números chamado *Irracionais*, que são números não racionais, por

exemplo $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$. Um fato incrível é que existem mais números irracionais do que racionais, mas a compreensão desse fato foge ao escopo deste texto. Ver figura 1.3.

1.1 Ordem para realizar operações matemáticas

No processo de resolução de problemas matemáticos, frequentemente encontramos expressões que envolvem sinais de agrupação como parênteses, colchetes e chaves, assim como operações soma(+), subtração (−), produto (*) ou quociente (/). Um problema que precisamos resolver é: **Qual é a ordem na qual devo resolver essas operações?**

Para responder esta pergunta vamos dividir em dois casos

1. Quanto a expressão a ser resolvida não possui sinais de agrupação, primeiro devemos resolver a multiplicação ou divisão (seguindo a ordem de esquerda a direita), quando não tiver operações de multiplicação ou divisão, calculamos as somas ou subtrações, independente da ordem.
2. Quando a expressão a ser resolvida possui sinais de agrupação. Neste caso precisamos resolver primeiro o que está dentro dos parênteses, quando não tiver operações dentro dos parênteses, resolvemos os colchetes, e quando não houver alguma operação no colchete resolvemos as chaves.

Exemplo 1.5. Calcule o valor das seguintes expressões:

1. $3 + 4 * 2 - \frac{6}{2}$. Como a expressão não possui sinais de agrupação, primeiro devemos resolver o produto e a divisão

$$3 + 4 * 2 - \frac{6}{2} = 3 + 8 - 3 = 11 - 3 = 8.$$

2. $40/5 * 2$. Como a expressão não possui sinais de agrupação, primeiro devemos resolver o produto ou quociente. Contudo, nesta expressão apenas temos essas duas operações por isso precisamos fazer a conta de esquerda à direita, isto é:

$$40/5 * 2 = 8 * 2 = 16$$

Observe que se fazemos a conta de direita à esquerda teremos um valor errado, que é $40/10 = 4$.

3. $[(2-3)*2+\frac{4-1}{3}]+10$, como temos sinais de agrupação, primeiro devemos resolver o que está dentro do parênteses, isto é $2 - 3 = -1$, logo o que está dentro do colchete. Exercício: Finalize a conta.

Para finalizar esta seção, segue uma lista de exercícios para treinar o conteúdo estudado e assim consolidar o aprendido.

Exercícios 1.6. *Encontre os valores das seguintes expressões*

1. $5 - 3 * 2 + 8/4$,
2. $(7 - 4) * (6/2) + 1 + 3 - 2$,
3. $12 * 4/3$,
4. $12/4 * 3$,
5. $12/(4 * 3)$.

1.2 Razão e Proporção

Na matemática o termo *Razão* representa uma comparação entre duas grandezas(grandeza é algo que pode ser mensurável). Por exemplo ao fazermos

um bolo, por cada copo cheio de farinha, devemos colocar 3 ovos (Não use esta receita! é apenas um exemplo kk) a razão é $\frac{1}{3}$ e representa, neste caso, por cada copo de farinha, devemos colocar 3 ovos.

Um outro exemplo seria, por cada volta ao bairro que uma pessoa faz, ela bebe dois copos de água, então temos uma razão $\frac{1}{2}$.

O termo *Proporção* representa uma igualdade entre duas razões, isto é

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

É importante destacar que a igualdade anterior é equivalente à seguinte igualdade

$$A * D = B * C. \quad (1.1)$$

Esta última igualdade é muitas vezes usada para resolvermos problemas específicos.

Exemplo 1.7. Calcule o valor de x na seguinte expressão:

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{15}.$$

Solução:

Usando a equação 1.1, chamada de multiplicação cruzada, temos que

$$2 * 15 = 6 * x$$

$$6 * x = 2 * 15$$

$$6 * x = 30$$

$$x = \frac{30}{6}$$

$$x = 5$$

Exercícios 1.8. Encontre o valor da incôgnita em cada uma das seguintes equações:

$$1. \frac{4}{x} = \frac{2}{8}.$$

$$2. \frac{x}{3} = \frac{9}{3}.$$

$$3. \frac{5}{7} = \frac{20}{x}.$$

1.3 Regra de Três Simples

Definição 1.9. Definimos por *grandeza* tudo aquilo que pode ser contado e medido, como o tempo, a velocidade, comprimento, preço, idade, temperatura entre outros. As grandezas são classificadas em: diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais

São aquelas grandezas onde a variação de uma provoca a variação da outra numa mesma razão. Se uma dobra a outra dobra, se uma triplica a outra triplica, se uma é dividida em duas partes iguais a outra também é dividida à metade.

Exemplo 1.10. Se três cadernos custam R\$ 8,00, o preço de seis cadernos custará R\$ 16,00. Observe que se dobramos o número de cadernos também dobramos o valor dos cadernos.

Solução:

Isto pode ser visto em termos de proporção:

$$\frac{\text{Cadernos}}{\text{preço}} = \frac{3}{8} = \frac{6}{16}.$$

Observe que se multiplicamos por 2 tanto ao numerador quanto ao denominador de $\frac{3}{8}$, obtemos exatamente $\frac{6}{16}$. Por esta razão dizemos que as grandezas cadernos e preço são diretamente proporcionais.

Exemplo 1.11. Se João percorre de moto 20km em 30min, ele percorrerá quantos quilômetros em 60min?

Solução:

Observemos que se a grandeza distância aumenta, a grandeza tempo também aumentará, por isto essas grandezas são diretamente proporcionais. Logo:

$$\frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{20}{30} = \frac{x}{60}.$$

Usando a multiplicação cruzada na última igualdade temos:

$$20 * 60 = x * 30$$

$$x * 30 = 1200$$

$$x = \frac{1200}{30}$$

$$x = 40.$$

Resposta: João percorrerá 40km.

Inversamente Proporcionais

Uma grandeza é inversamente proporcional quando operações inversas são utilizadas nas grandezas. Por exemplo, se dobramos uma das grandezas temos que dividir a outra por dois, se triplicamos uma delas devemos dividir a outra por três e assim sucessivamente. A velocidade e o tempo são considerados grandezas inversas, pois se aumentarmos a velocidade, o tempo é reduzido, e se diminuirmos a velocidade, o tempo aumenta.

Exemplo 1.12. Para encher um tanque são necessárias 30 vasilhas de 6 litros cada uma. Se forem usadas vasilhas de 3 litros cada, quantas serão necessárias?

Solução:

Observemos primeiro que se aumentamos o número de vasilhas para encher o tanque, precisaremos de menos litros em cada uma, equivalentemente, se aumentamos o número de litros em cada vasilha, diminuiremos o número de vasilhas necessárias para encher o tanque. Por esta análise concluímos que as grandezas número de vasilhas e litros são inversamente proporcionais. Ou seja, uma grandeza é proporcional ao inverso da outra. A conta a ser feita para encontrarmos a resposta é:

Vasilhas	Litros
30	6
x	3

$$\frac{30}{x} = \frac{3}{6}$$

$$30 * 6 = x * 3$$

$$3x = 180$$

$$x = \frac{180}{3}$$

$$x = 60.$$

Observe que se as grandezas fossem diretamente proporcionais o lado direito da primeira igualdade acima deveria ser $\frac{6}{3}$.

Exemplo 1.13. Cinco operários fazem uma obra em 10 dias, quantos operários serão necessários para terminar a mesma obra em 2 dias?

Solução:

Observemos primeiro que se aumentamos o número operários, serão necessários menos dias, equivalentemente, se aumentamos o número de dias, serão necessários menos operários. Por esta análise concluímos que as grandezas número de operários e dias são inversamente proporcionais. Ou seja, uma grandeza é proporcional ao inverso da outra. A conta a ser feita para encontrarmos a resposta é:

Operários	Dias
5	10
x	2

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{10}$$

$$5 * 10 = 2 * x$$

$$2 * x = 50$$

$$x = \frac{50}{2}$$

$$x = 25.$$

Resposta: Serão necessários 25 operários para terminar a obra em apenas 2 dias.

Para finalizar a seção, seguem alguns exercícios para treinar o método estudado.

Exercícios 1.14. Use a regra de três simples direta ou inversa para resolver os seguintes exercícios:

1. Um pomar com 15 árvores rende 260 frutas. Se houvessem 33 árvores no pomar com o mesmo rendimento, quantas frutas conseguiríamos?

2. *Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4000 refrigerantes?*
3. *Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então qual é a massa corporal dele?*
4. *Alessandra leu um livro em 4 dias, lendo 15 páginas por dia. Se tivesse lido 10 páginas por dia, em quantos dias ela teria lido o mesmo livro?*
5. *Um festival foi realizado num campo de 240m por 45m. Sabendo que por cada 2m^2 havia, em média, 7 pessoas, quantas pessoas havia no festival?*
6. *Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de 1,8 metro. Suponha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual. A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de*
7. *Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziram 2000 desses panfletos?*

1.4 Regra de Três Composta

A regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1.15. Em 8 horas, 20 caminhões descarregam $160m^3$ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar $125m^3$?

Solução:

Caminhões	m^3 de areia	horas
20	160	8
x	125	5

Após entendermos o problema, preenchendo a tabela, precisamos nos perguntar qual a grandeza que tem a incógnita x , neste caso é a grandeza caminhões. Logo precisamos estudar o tipo de proporcionalidade, direta ou inversa, que a grandeza caminhões tem com as outras grandezas.

1. Grandeza caminhões - Grandeza m^3 de areia:

Caminhões	m^3 de areia
20	160
x	125

Sem considerar a grandeza horas, observamos que se aumenta o número de caminhões, então aumentará o número de m^3 de areia descarregada, equivalentemente, se diminui o número de m^3 de areia descarregada, diminuirá o número de caminhões trabalhando. Portanto as grandezas são diretamente proporcionais.

2. Grandeza Caminhões - Grandeza horas:

Caminhões	Horas
20	8
x	5

Sem considerar a grandeza m^3 de areia descarregada, observamos que se diminuirmos o número de horas nos quais os caminhões estarão trabalhando, precisaremos de mais caminhões para realizar a mesma obra. Portanto as grandezas são inversamente proporcionais.

Com estas informações podemos montar nossa equação, considerando do lado esquerdo da igualdade a fração que contém nossa variável e do lado direito as frações das grandezas, invertendo a ordem caso a proporcionalidade seja inversa.

$$\begin{aligned}\frac{20}{x} &= \frac{160}{125} \times \frac{5}{8} \\ \frac{20}{x} &= \frac{160 * 5}{125 * 8} \\ \frac{20}{x} &= \frac{800}{1000} \\ 800 * x &= 1000 * 20 \\ x &= \frac{20000}{800} \\ x &= 25.\end{aligned}$$

Resposta: Serão necessários 25 caminhões para realizar a obra nas condições propostas.

Exemplo 1.16. Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 300m. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 225m?

Solução: Observamos que neste problema temos quatro grandezas relacionadas. Agrupando os dados numa tabela, temos:

Operários	horas por dia	dias	obra em metros
20	8	18	300
16	9	x	225

Analogamente ao caso anterior devemos identificar a grandeza que contém a incógnita, neste caso é a grandeza dias. Após esse passo, vamos comparar a grandeza dias com as outras grandezas.

- Grandeza Dias - Grandeza Operários

Dias	Operários
18	20
x	16

Observamos que mantendo constante as grandezas não estudadas neste caso, ao diminuirmos o número de operários, precisaremos aumentar o número de dias para realizar uma determinada obra. Portanto as grandezas são inversamente proporcionais.

- Grandeza Dias - Grandeza Horas por dia

Dias	Horas por dia
18	8
x	9

Observamos que ao manter constante as grandezas não estudadas neste caso, temos que se aumentarmos o número de horas por dia (de 8 para 9), precisaremos trabalhar menos dias. Logo as grandezas são inversamente proporcionais.

- Grandeza Dias - Grandeza Obra em metros

Dias	Obra em metros
18	300
x	225

Observamos que ao manter constante as grandezas não estudadas neste caso, temos que se diminuirmos a obra(de 300m para 225m), precisaremos trabalhar menos dias. Logo as grandezas são diretamente proporcionais.

Finalmente montaremos a equação, lembrando que do lado esquerdo escreveremos a fração que contém a incógnita x e do lado direito as frações correspondentes às outras grandezas, invertendo a ordem da fração, caso a proporcionalidade for inversa e mantendo a ordem caso a proporcionalidade for direta.

$$\begin{aligned}\frac{18}{x} &= \frac{16}{20} \times \frac{9}{8} \times \frac{300}{225} \\ \frac{18}{x} &= \frac{16 \times 9 \times 300}{20 \times 8 \times 225} \\ \frac{18}{x} &= \frac{43200}{36000} \\ 43200 \times x &= 360000 \times 18 \\ x &= \frac{648000}{43200} \\ x &= 15.\end{aligned}$$

Resposta: Serão necessários 15 dias para realizar a obra nas condições dadas.

Exercícios 1.17. Use a regra de três composta para resolver os seguintes exercícios:

1. Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas? Resposta: 6 horas.

2. *Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão? Resposta: 35 dias.*
3. *Um caminhoneiro entrega uma carga em um mês, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deveria viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h? Resposta: 10 horas por dia.*
4. *Um ônibus percorre 1800 km em 6 dias, correndo 12 horas por dia. Quantos quilômetros percorrerá em 10 dias, correndo 14 horas por dia?*
5. *Um ciclista percorreu 150 km em 3 dias, pedalando 2 horas, diariamente. Pedalando 4 horas por dia, durante 4 dias, ele percorrerá quantos quilômetros?*
6. *Uma família de 6 pessoas consome em 2 dias 3 kg de pão. Quantos quilos serão necessários para alimentá-la durante 5 dias estando ausentes*
2
7. *Em uma fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?*

1.5 Porcentagem

Definição 1.18. *Porcentagem* (do latim per centum, significando "por cento", "a cada centena") é uma medida de razão com base 100 (cem). É um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 (dois) valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100 (cem), ou seja, é dividir um número por 100 (cem).

Notação:

A porcentagem é uma razão, logo, pode ser representada por uma fração, que, por sua vez, pode ser escrita na forma decimal. De modo geral, se temos um número acompanhado pelo símbolo %, basta dividi-lo por 100, ou seja:

$$x\% = \frac{x}{100}.$$

$x\%$ de um valor y , simplesmente é

$$x\% \times y = \frac{x}{100} \times y = \frac{x \times y}{100}.$$

Exemplo 1.19. As aulas ministradas antes da suspensão foram 18 horas aula de um total de 80, quanto por cento do total as aulas ministradas representa?

Solução:

Como a porcentagem é uma razão cujo denominador é 100, precisamos encontrar o numerador x na seguinte proporção:

$$\begin{aligned}\frac{18}{80} &= \frac{x}{100} \\ 18 \times 100 &= 80 \times x \\ 80 \times x &= 18 \times 100 \\ 80 \times x &= 1800 \\ x &= \frac{1800}{80} \\ x &= 22.5\end{aligned}$$

Resposta: As aulas ministradas antes da suspensão representam o 22.5% do total de aulas.

Exemplo 1.20. Os seguintes exemplos são porcentagens que frequentemente encontramos em problemas.

$$1. \ 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0.05.$$

$$2. \ 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

$$3. \ 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

$$4. \ 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

$$5. \ 100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemplo 1.21. Se ao vender um produto foi anunciado que o valor do mesmo seria 50% do valor total, R\$ 120.00, qual foi o valor de venda do produto?

Solução:

Pelo exemplo anterior sabemos que $50\% = 0.5$, então o valor do produto foi

$$50\% \times 120 = 0.5 \times 120 = 60.$$

Resposta: O produto foi vendido por R\$ 60.00

Exercícios 1.22. Calcule os valores solicitados nas seguintes perguntas:

1. Quanto vale o 30% de 20?
2. Quanto vale o 20% de 30?
3. Calcule o preço inicial de um produto que foi vendido por R\$120,00, considerando que o vendedor vendeu o produto a 60% do valor.

Exercícios 1.23. *Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:*

1. *12% de R\$ 200,00 corresponde a R\$ 2,40?*
2. *Obtém-se 30% de uma quantia multiplicando-a por 0.3?*
3. *Três pessoas correspondem a 6% de um grupo de 50 pessoas?*
4. $\frac{2}{5} = 4\%$?

Capítulo 2

Matemática Financeira

A matemática financeira é a área da matemática que estuda a equivalência de capitais no tempo, ou seja, como se comporta o valor do dinheiro no decorrer do tempo.

Como exemplos dessas operações podemos citar as aplicações financeiras, empréstimos, renegociação de dívidas, ou mesmo, tarefas simples, como calcular o valor de desconto num determinado produto. A seguir, definiremos os principais elementos que aparecem nas transações financeiras.

1. **Capital (C)**

Representa o valor do dinheiro no momento atual. Este valor pode ser de um investimento, dívida ou empréstimo.

2. **Juros (J)** Representam os valores obtidos pela remuneração de um capital. Os juros representam, por exemplo, o custo do dinheiro tomado emprestado.

Ele pode também ser obtido pelo retorno de uma aplicação ou ainda pela diferença entre o valor à vista e a prazo em uma transação comercial.

O cálculo de juros pode ser simples ou composto. No regime de capitalização simples, a correção é feita sempre sobre o valor do capital inicial.

Já nos juros compostos, a taxa de juros é aplicada sempre sobre o montante do período anterior. Note que esse último é muito utilizado nas transações comerciais e financeiras.

3. Montante (M)

Corresponde ao valor futuro, ou seja, é o capital mais os juros acrescidos ao valor.

Assim,

$$M = C + J.$$

4. **Taxa de Juros (i)** É o percentual do custo ou remuneração paga pelo uso do dinheiro. A taxa de juros está sempre associada a um certo prazo, que pode ser por exemplo ao dia, ao mês ou ao ano.

Exemplo 2.1. Suponhamos que, no início de certo mês, o preço de determinado produto seja R\$20.00 reais e no final do mês o preço tenha aumentado para R\$21.00. O aumento de preço foi de R\$1.00; a razão entre o aumento e o preço inicial, expressa na forma de porcentagem é chamada de **variação percentual** de preço entre as datas consideradas. Assim, indicando a variação percentual por j , teremos:

$$j = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$$

De modo geral, consideremos uma grandeza que assuma um valor V_0 na data inicial e o valor V_t numa data futura t . Chamamos de **variação**

percentual dessa grandeza entre as datas 0 e t e indicamos por j o número dado por:

$$j = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1,$$

quando a variação percentual é positiva, denomina-se **taxa percentual de crescimento**, quando é negativa seu valor absoluto é denominado **taxa percentual de decrescimento**.

2.1 Juros Simples

Os juros simples são calculados levando em consideração um determinado período. Ele é calculado pela fórmula:

$$J = C \times i \times n$$

Onde:

C: capital aplicado,

i: taxa de juros,

n: período que corresponde os juros.

Logo, o montante dessa aplicação será:

$$M = C + J$$

$$M = C + C \times i \times n$$

$$M = C \times (1 + i \times n).$$

Exemplo 2.2. José emprestou R\$ 300,00 reais a João, a juros simples de 5% ao mês. O empréstimo deverá ser quitado em 3 meses. Qual será o valor final da quitação?

Solução:

Dados:

Capital: $C = 300$,

Taxa de juros: $i = 5\%$,

Tempo: $n = 3$,

Quitação = Montante = $M = ?$

Observe que a taxa e o tempo estão nas mesmas unidades(mês), então

$$M = C + J$$

$$M = 300 + J$$

Onde

$$J = C \times i \times n$$

$$J = 300 \times \frac{5}{100} \times 3$$

$$J = \frac{300 \times 5 \times 3}{100}$$

$$J = \frac{4500}{100}$$

$$J = 45.$$

Portanto

$$M = C + J = 300 + 45 = 345.$$

Resposta: O valor final da quitação é de R\$ 345,00 reais.

Exemplo 2.3. Se Lúcia aplica um capital a uma taxa de juros simples a 12% ao ano e obtém R\$ 206,00 reais em 3 meses. Qual foi o capital investido?

Solução: Observe que as unidades da taxa de juros e do tempo não são as mesmas, por isso precisamos converter uma unidade na outra.

Dados:

Capital: $C = ?$

Taxa de juros: $i = 12\%$ ao ano ,

Tempo: $n = 3$ meses, como 12 meses = 1 ano então: $n = \frac{3}{12}$ ao ano

Montante: $M = 206$

$$M = C + J$$

$$M = C + C \times i \times n$$

$$206 = C + C \times \frac{12}{100} \times \frac{3}{12}$$

$$206 = C + \frac{C \times 3}{100}, \quad \text{multiplicando por 100 aos dois lados, temos:}$$

$$206 \times 100 = 100C + 3C$$

$$103C = 20600$$

$$C = \frac{20600}{103} = 200.$$

Resposta: O capital investido foi R\$ 200,00 reais.

Exemplo 2.4. Uma empresa recebeu um empréstimo bancário de R\$ 40.000,00 reais por 2 anos, pagando um montante de R\$ 48.000,00 reais. Se o empréstimo foi calculado usando juros simples, qual foi o valor da taxa de juros anual nesta transação?

Solução:

Montante = 48.000,

Capital = 40.000,

taxa de juros anual: $i = ?$

tempo: $n = 2$ anos.

$$M = C + J$$

$$M = C + C \times i$$

$$48.000 = 40.000 + 40.000 \times i \times 2$$

$$80.000 \times i = 48.000 - 40.000$$

$$80.000 \times i = 8.000$$

$$i = \frac{8.000}{80.000} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$

Resposta: A taxa de juros ao ano foi de 10%.

Exercícios 2.5. *Resolva os seguintes exercícios:*

1. *Suponhamos que, no início de certo mês, o preço de determinado produto seja R\$80.00 reais e após 2 meses o preço tenha aumentado para R\$88.00. O aumento de preço foi de R\$8.00. Qual é a **variação percentual** de preço entre as datas consideradas. Trata-se de uma taxa percentual de crescimento? de decrescimento?*
2. *Uma pessoa aplica R\$ 18.000,00 à taxa de 1,5% ao mês durante 8 meses. Determine o valor acumulado ao final deste período.*
3. *Uma pessoa aplicou o capital de R\$ 1.000,00 a uma taxa de 2% ao bimestre durante 16 meses. Determine os juros e o montante dessa aplicação.(Dica: Observe que a taxa é ao bimestre e o tempo está em meses)*
4. *Uma pessoa aplicou o capital de R\$ 1.200,00 a uma taxa de 2% ao mês durante 14 meses. Determine os juros e o montante dessa aplicação.*

5. *Em um empréstimo de R\$ 40.000,00 feito por um mês, uma empresa pagou um montante de R\$ 41,000,00. em um mês. Qual foi a taxa de juros desta transação no período da transação?*
6. *Um capital aplicado a juros simples durante 2 anos, sob taxa de juros de 5% ao mês, gerou um montante de R\$ 26.950,00. Determine o valor do capital aplicado.*

2.2 Juros Compostos

O sistema de juros compostos é chamado de capitalização acumulada, pois, ao final de cada período os juros que incidem sobre o capital inicial são incorporados. Para calcular o montante em uma capitalização a juros compostos após um período temos

$$M_1 = C + C \times i \times 1 = C(1 + i),$$

Para calcularmos o montante obtido após dois períodos, devemos considerar que o novo capital é o valor obtido no montante após um período, M_1 , por isto dizemos que nos juros compostos, os juros são calculados sobre os juros, isto é

$$M_2 = M_1 + M_1 \times i \times 1 = C(1 + i) + C(1 + i)i = C(1 + i)^2.$$

Para calcular o montante M em uma capitalização a juros compostos para um tempo n de um capital C e uma taxa de juros i , usamos a seguinte fórmula:

$$M = C(1 + i)^n$$

Exemplo 2.6. Calcule o montante obtido ao investir durante 2 anos um capital de R\$4.000,00 na poupança, considerando que a taxa de juros é 3% ao ano.

Solução:

Observemos que os dados são: $C = 4000$, $i = 3\%$ e $n = 2$, usando a fórmula de juros compostos temos:

$$\begin{aligned} M &= C(1 + i)^n \\ &= 4000(1 + 0.03)^2, \boxed{\text{pois } 3\% = 0.03} \\ &= 4000(1.03)^2 \\ &= 4000(1.0609) \\ &= 4243.6 \end{aligned}$$

Resposta: O valor obtido após os dois anos é R\$ 4243.6 reais, os juros obtidos foram

$$J = M - C = 4243.6 - 4000 = 243.6.$$

Exemplo 2.7. Um capital de R\$ 3.000,00 reais foi aplicado durante 2 meses produzindo um montante de R\$ 3.307,50 reais. Qual foi a taxa de juros mensal desta aplicação?

Solução:

Primeiro identificaremos os dados do problema, qual é a incógnita e logo usaremos a fórmula de juros compostos.

Dados: $C = 3.000$, $n = 2$ meses, $M = 3307,50$ e a incógnita é i .

$$M = C(1 + i)^n$$

$$3307,50 = 3000(1 + i)^2 \quad \boxed{\text{Dividindo por 3000 temos :}}$$

$$\frac{3307,50}{3000} = (1 + i)^2$$

$$(1 + i)^2 = \frac{3307,50}{3000} = 1,1025 \quad \boxed{\text{Tirando raiz dos dois lados temos :}}$$

$$(1 + i) = \sqrt{1,1025} = 1,05$$

$$i = 1,05 - 1 = 0,05 = 0,05 \times 100\%$$

$$i = 5\%.$$

Resposta: A taxa de juros dessa transação foi de 5% ao mês.

Exemplo 2.8. Qual é o capital que deve ser aplicado a juros compostos por 18 meses a uma taxa de juros semestral de $i = 15\%$ para resultar em um montante de R\$ 10.000,00 reais.

Solução:

Primeiro identificaremos os dados fornecidos no problema. $M = 10.000$, $i = 15\% = \frac{15}{100} = 0,15$ e $n = 18$ meses, convertendo a semestre temos $n = 3$ semestres (lembra que um semestre equivale a 6 meses). Substituindo na fórmula de juros compostos temos:

$$M = C(1 + i)^n$$

$$10000 = C(1 + 0,15)^3$$

$$10000 = C(1,15)^3$$

$$10000 = C(1,520875)$$

$$C = \frac{10000}{1,520875} = 6.575,16$$

Resposta: O capital que deve ser investido é de R\$ 6.575,16 reais.

Para finalizar a seção seguem uma lista de exercícios para treinar o aprendido.

Exercícios 2.9. *Resolva os seguintes exercícios:*

1. *Calcule o montante obtido ao investir durante 3 anos um capital de R\$6.000,00 na poupança, considerando que a taxa de juros é 5% ao ano. (OBS: Poupança é juros compostos, pois os juros são calculados considerando os juros obtidos no mês anterior)*
2. *Um capital de R\$ 6.000,00 reais foi aplicado durante 2 meses produzindo um montante de R\$ 7.260,00 reais. Qual foi a taxa de juros mensal desta aplicação?*
3. *Qual é o capital que deve ser aplicado a juros compostos por 12 meses a uma taxa de juros trimestral de $i = 12\%$ para resultar em um montante de R\$ 10.000,00 reais.*
4. *Calcule o montante obtido ao investir durante 4 anos um capital de R\$8.000,00 na poupança, considerando que a taxa de juros é 3% ao ano.*
5. *Um capital de R\$ 8.000,00 reais foi aplicado durante 3 meses produzindo um montante de R\$ 13.824,00 reais. Qual foi a taxa de juros mensal desta aplicação?*
6. *Qual é o capital que deve ser aplicado a juros compostos por 24 meses a uma taxa de juros anual de $i = 10\%$ para resultar em um montante de R\$ 20.000,00 reais.*

2.3 Descontos

Esta seção será baseada no livro do [3]. Em muitas oportunidades nos encontramos com a palavra *Desconto*, por exemplo ao comprar muitas unidades de um determinado produto é comum que o comprador peça um abatimento no preço final dos produtos, esse abatimento é chamado de *Desconto*. O pedido de desconto também pode ocorrer quando um comprador tenta pagar menos por um determinado produto.

Existe também o conceito de *Desconto de Títulos* que é usado principalmente por empresas. Por exemplo, uma empresa fez a venda de um carro por um valor de R\$ 30.000,00 concedendo um prazo de 12 meses para o pagamento. Nesse caso, o vendedor emite um documento chamado de *Duplicata*, o qual lhe dará o direito de cobrar do comprador o valor de R\$ 30.000,00 no final do período combinado. Caso o vendedor necessite do dinheiro antes do vencimento da duplicata, ele pode ir a um banco e efetuar o desconto da duplicata. O procedimento consiste na empresa ceder o direito do recebimento da duplicata para o banco. Em troca, recebendo do banco um valor menor do que o valor da duplicata. Digamos, por exemplo, que a duplicata de R\$ 30.000,00 seja descontada 1 mês antes do vencimento e a empresa recebe do banco R\$ 29.600,00 nessa data. Assim, em troca de um adiantamento de R\$ 29.600,00 o banco fica com o direito de receber a duplicata de R\$ 30.000,00. A diferença de R\$ 30.000,00 e o valor R\$ 29.600,00 que é R\$ 400,00 é chamada de desconto da duplicata.

Chamaremos de N o valor do título a ser descontado, conhecido também como *Valor Nominal*, d ou i a taxa de desconto utilizada pelo banco e n o prazo antecipado do vencimento do título. O Desconto bancário(ou comercial) será indicado por D e pode ser calculado usando a fórmula:

$$D = N.d.n$$

lembrem que o prazo n e a taxa d devem estar na mesma unidade.

A diferença $N - D$ é chamado de *Valor descontado* (ou *valor líquido do título*)

Exemplo 2.10. Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R\$ 10.000,00, três meses antes do vencimento a uma taxa de desconto de 2%a.m. Calcule o desconto e valor descontado ou líquido recebido pela empresa.

Solução:

Identificando os dados do problema temos:

Desconto = incógnita;

Valor nominal $N = R\$10.000,00$;

tempo=3 meses;

taxa de desconto $d = i = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$.

Usando a fórmula:

$$\begin{aligned} D &= N.d.n \\ &= 10000.(0.02).3 \\ &= 600. \end{aligned}$$

Logo o valor de desconto $V_d = 10000 - 600 = 9400$

Exemplo 2.11. Uma duplicata cujo valor nominal é de R\$3.000,00 foi resgatada 3 meses antes do fim do pagamento a taxa de 24% ao ano. Qual foi o desconto comercial simples?

Solução:

Primeiro identificaremos os dados do problema:

$N = 3000$;

$$n = 3;$$

$$i = d = 24\%a.a. = \frac{24}{12}\%a.m. = 2\% = 0,02;$$

$$D = ?$$

$$\begin{aligned} D &= N.d.n \\ &= 3000.(0,02).3 \\ &= 180. \end{aligned}$$

Exemplo 2.12. Um banco cobra em suas operações de desconto de duplicatas, com prazo de antecipação de 4 meses, uma taxa de desconto comercial de 3% ao mês. Qual a taxa mensal de juros simples que está sendo efetivamente cobrada?

Solução:

Como o valor da duplicata não foi dado podemos considerar, sem perda de generalidade, que o valor é por exemplo R\$ 100.00. Então o desconto será:

$$D = 100. \frac{3}{100}.4 = 12.$$

O valor descontado será $V_d = N - D = 100 - 12 = 88$. Em resumo, o banco emprestou R\$ 88,00(capital) para receber um montante igual a R\$100,00, os juros nesta transação são de R\$12,00 reais. Usando a fórmula de juros simples temos

$$12 = 88.i.4$$

$$12 = 352i$$

$$i = \frac{12}{352}$$

$$i = 0,034 = 0,034 \times 100\% = 3,4\%.$$

Exercícios 2.13. 1. Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R\$ 20.000,00, cinco meses antes do vencimento a uma taxa de des-

conto de 4%a.m. Calcule o desconto e valor descontado ou líquido recebido pela empresa.

2. Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R\$ 5.000,00, três meses antes do vencimento a uma taxa de desconto de 2%a.m. Calcule o desconto e valor descontado ou líquido recebido pela empresa.
3. Uma duplicata cujo valor nominal é de R\$5.000,00 foi resgatada 4 meses antes do fim do pagamento a taxa de 36% ao ano. Qual foi o desconto comercial simples?
4. Uma duplicata cujo valor nominal é de R\$12.000,00 foi resgatada 6 meses antes do fim do pagamento a taxa de 20% ao ano. Qual foi o desconto comercial simples?
5. Um banco cobra em suas operações de desconto de duplicatas, com prazo de antecipação de 2 meses, uma taxa de desconto comercial de 2.5% ao mês. Qual a taxa mensal de juros simples que está sendo efetivamente cobrada?(Dica: considere o valor da duplicata por exemplo de R\$100.00, logo calcule o desconto e o valor descontado. Finalmente, use a fórmula de juros simples para obter a taxa i)

Capítulo 3

Unidades de Medida e suas conversões. Notação científica.

Este capítulo será usado nos próximos capítulos, quando formos estudar áreas de regiões planas e volumes de sólidos, assim como no último capítulo, estatística.

3.1 Notação Científica

Notação científica, é também denominada por padrão ou notação em forma exponencial, é uma forma de escrever números que acomoda valores demasiadamente grandes ou pequenos para serem convenientemente escritos em forma convencional. O uso desta notação está baseado nas potências de 10.

Números muito pequenos ou muito grandes são frequentemente encontrados nas ciências em geral e escrever em notação científica facilita fazer comparações e cálculos.

Um número em notação científica apresenta o seguinte formato:

$$N \times 10^n.$$

Sendo:

N um número real igual ou maior que 1 e menor que 10;

n um número inteiro.

Temos os seguintes passos:

1º Passo: Escrever o número na forma decimal, com apenas um algarismo diferente de 0 na frente da vírgula.

2º Passo: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.

3º Passo: Escrever o produto do número pela potência de 10.

Exemplo 3.1. Neste exemplo descreveremos vários números decimais (do lado esquerdo) em notação científica (do lado direito).

1. $33,5 = 3,35 \times 10^1$,
2. $0,52 = 5,2 \times 10^{-1}$,
3. $21534,1 = 2,15341 \times 10^4$,
4. $0,123 = 1,23 \times 10^{-1}$.
5. $0,000001 = 1 \times 10^{-6}$

Exercícios 3.2. *Escreva os seguintes números na notação científica:*

1. $23,2124$

2. 0,0001245

3. 1002013

4. 1213,249827

5. 0,000000001

3.2 Unidades de Medida e suas Conversões

(Fonte Wikipédia) Existem diversas unidades de medida atualmente usadas, contudo, para efetuar medidas é necessário fazer uma padronização, escolhendo unidades para cada grandeza. Antes da instituição do Sistema Métrico Decimal, as unidades de medida eram definidas de maneira arbitrária, variando de um país para outro, dificultando as transações comerciais e o intercâmbio científico entre eles. As unidades de comprimento, por exemplo, eram quase sempre derivadas das partes do corpo do rei de cada país: a jarda, o pé, a polegada e outras. O Sistema Internacional de Unidades foi instituído em 1960 e definiram-se sete grandezas físicas postas como *básicas ou fundamentais*. Por conseguinte, passaram a existir sete unidades *básicas* correspondentes

Símbolo	Unidade	Quantidade-Grandeza
A	ampere	corrente elétrica
K	kelvin	temperatura
s	segundo	tempo
m	metro	distância
kg	quilograma	massa
cd	candela	intensidade luminosa
mol	mole	quantidade de substância

Consideram-se unidades derivadas do Sistema Internacional apenas aquelas que podem ser expressas através das unidades básicas do SI e sinais de multiplicação e divisão. Desse modo, há apenas uma unidade do SI para cada grandeza. Contudo, para cada unidade do SI pode haver várias grandezas. Às vezes, dão-se nomes especiais para as unidades derivadas.

Segue uma tabela com as unidades Sistema Internacional derivadas que recebem um nome especial e símbolo particular:

Grandeza	Unidade	Símbolo	Dimensional analítica	Dimensional sintética
Ângulo plano	radiano	rad	1	m/m
Ângulo sólido	esferorradiano ¹	sr	1	m ² /m ²
Atividade catalítica	katal	kat	mol/s	---
Atividade radioativa	becquerel	Bq	1/s	---
Capacitância	farad	F	A ² ·s ² /(kg·m ²)	A·s/V
Carga elétrica	coulomb	C	A·s	---
Condutância	siemens	S	A ² ·s ³ /(kg·m ²)	A/V
Dose absorvida	gray	Gy	m ² /s ²	J/kg
Dose equivalente	sievert	Sv	m ² /s ²	J/kg
Energia	joule	J	kg·m ² /s ²	N·m
Fluxo luminoso	lúmen	lm	cd	cd·sr
Fluxo magnético	weber	Wb	kg·m ² /(s ² ·A)	V·s
Força	newton	N	kg·m/s ²	---
Frequência	hertz	Hz	1/s	---
Indutância	henry	H	kg·m ² /(s ² ·A ²)	Wb/A
Intensidade de campo magnético	tesla	T	kg/(s ² ·A)	Wb/m ²
Luminosidade	lux	lx	cd/m ²	lm/m ²
Potência	watt	W	kg·m ² /s ³	J/s
Pressão	pascal	Pa	kg/(m·s ²)	N/m ²
Resistência elétrica	ohm	Ω	kg·m ² /(s ³ ·A ²)	V/A
Temperatura em Celsius	grau Celsius	°C	---	---
Tensão elétrica	volt	V	kg·m ² /(s ³ ·A)	W/A

Figura 3.1: Unidades Derivadas do SI

Existem outras unidades que serão usadas no decorrer deste texto, elas são **Área** = m^2 e **Volume** = m^3 .

Esses elementos representam a intensidade de uma grandeza expressa pelas unidades, são utilizados em forma de prefixos e seus valores são baseados em expoentes de base 10, ou seja, possui letras diferentes representados a cada 10 vezes uma unidade. Observe a tabela a seguir: Observe na imagem que

Múltiplos			Submúltiplos		
Factor	Prefixo	Símbolo	Factor	Prefixo	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Figura 3.2: Representação dos múltiplos, submúltiplos e seus símbolos

a representação gráfica dos símbolos são todas em minúsculas, com exceção do mega, giga, tera, peta, exa, zetta e yotta, a partir da potência 10^6 todos os símbolos devem ser transcritos em letra maiúscula.

Exemplo 3.3. Nos seguintes exemplos usaremos os prefixos da tabela acima para termos as seguintes igualdades:

1. 4 nanómetros=4nm= 4×10^{-9} m.
2. 12 centímetros=12cm= 8×10^{-2} m=0,12m.
3. 92 hectómetros = 92hm = 92×10^2 m=9200.

4. $102\text{GA} = 102 \times 10^9\text{A}$.

Quando precisarmos transformar uma unidade em outra podemos usar a figura a seguir. Por exemplo se quisermos converter unidades da esquerda (maiores)

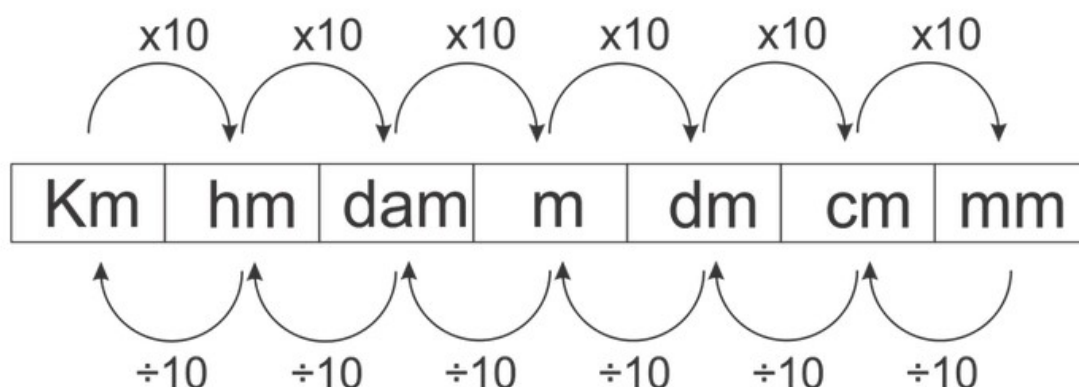


Figura 3.3: Essa representação vale para os submúltiplos seguintes.

em unidades da direita (menores) devemos multiplicar, por exemplo: $2\text{km} = 2 \times 10\text{hm}$, pois há apenas uma seta para irmos de km para hm, se quisermos ir de hm para dm, precisamos multiplicar por 10^4 , porque há 4 setas para irmos de hm para dm.

Por outro lado, se quisermos converter unidades da direita para uma unidade da esquerda precisamos dividir, por exemplo: $11\text{cm} = \frac{11}{100}\text{m} = 11 \times 10^{-2}$, $5\text{m} = \frac{5}{1000}\text{km} = 5 \times 10^{-3}\text{km}$.

Exercícios 3.4. *Converta os números dados em certas unidades para as unidades solicitadas.*

1. 2321mm a hm .

2. 1249dm a dam .

3. 21km a mm .

4. $213Mm$ a m .

5. $213ds$ a s .

6. 712 horas a minutos.

7. 64 minutos a segundos.

Capítulo 4

Áreas e Volumes

Neste capítulo aprenderemos a calcular áreas de figuras planas e volumes de sólidos. Este capítulo é literalmente parte do livro do Dante

4.1 Áreas

[1].

2 Áreas: medidas de superfícies

Desde a época dos antigos egípcios, que procuravam medir e demarcar suas terras (daí surgiu o nome Geometria = medida da terra), até hoje, quando topógrafos, geólogos e arquitetos fazem mapeamentos e plantas, o cálculo de áreas tem sido uma preocupação constante.

Com os colegas, sugira maneiras de comparar a área da superfície de dois lagos para determinar a maior delas. Neste tópico, aprofundaremos esse estudo, estabelecendo valores para as medidas das superfícies e conhecendo as fórmulas para o cálculo da área das superfícies mais comuns.

Tiago Orihuela/Acervo do fotógrafo

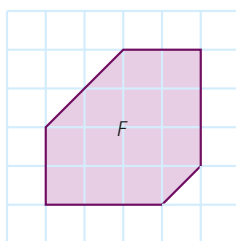


Lago Caracaranã, localizado em Roraima. Possui aproximadamente $2,5 \text{ km}^2$ de área superficial. Fotografia de 2010.

Uma das formas de medir a área da superfície de um lago é aproximar a área superficial do lago com a área de alguma figura geométrica. No caso do lago Caracaranã, seu perímetro é de aproximadamente 5,8 km. Aproximando sua área com a área de um círculo de perímetro igual, podemos encontrar uma medida de área equivalente à área aproximada do lago. Nas páginas 131, 133 e 137 a 140 esta explicação poderá ser mais bem explorada.

A ideia intuitiva de área

Suponha que queiramos medir a região do plano indicada por F na figura abaixo. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de área que chamaremos de U . O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área U . Esse número assim obtido é a área de F .



U

unidade de área: U

Então, a área da região plana F é 13,5 U, ou seja:

$$\text{área de } F = 13,5 U$$

Região quadrada unitária

Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada **região quadrada unitária**.

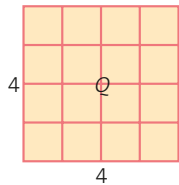


região quadrada unitária

Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

Área do quadrado

- Consideremos um quadrado Q cujo lado mede n , em que n é um número natural. Ele pode ser decomposto em n^2 quadrados justapostos, cada um com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, o quadrado Q tem área n^2 :



Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ quadrados unitários.

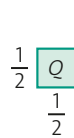
$$\text{área de } Q = n^2$$

Fique atento!

Quadrado é todo quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

Para nos referirmos à "área da região quadrada", falaremos simplesmente "área do quadrado".

- Vejam agora quando o lado do quadrado Q tem por medida $\frac{1}{n}$ em que $n \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso, o quadrado unitário pode ser decomposto em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q .



Quadrado unitário decomposto em $4 = 2^2$ quadrados congruentes a Q .

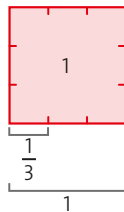
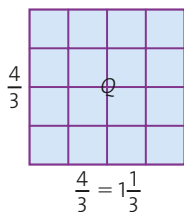
$$\text{Área do quadrado } Q = \frac{1}{4} \left(\frac{1^2}{2^2} \right) \text{ ou } \left(\frac{1}{2} \right)^2.$$

Assim, $n^2 \cdot (\text{área de } Q) = 1$. Logo:

$$\text{área de } Q = \frac{1}{n^2} \text{ ou } \left(\frac{1}{n} \right)^2$$

- Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado do quadrado Q é um número racional do tipo $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Nesse caso, pode-se decompor Q em m^2 quadrados, cada um dos quais com lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$.



Quadrado de lado $\frac{4}{3}$, decomposto em $16 = 4^2$ quadrados menores, cada um com lado cuja medida é $\frac{1}{3}$ e cuja área é $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

$$\text{Área do quadrado } Q = \frac{16}{9} \left(\frac{4^2}{3^2} \right) \text{ ou } \left(\frac{4}{3} \right)^2.$$

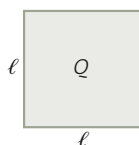
Assim, neste caso, a área do quadrado Q será dada por $m^2 \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja:

$$\text{área de } Q = \left(\frac{m}{n} \right)^2$$

É possível provar que, se a medida do lado do quadrado Q for um número irracional k , ainda assim:

$$\text{área de } Q = k^2$$

Conclusão: A área de um quadrado Q cujo lado mede ℓ é dada por:

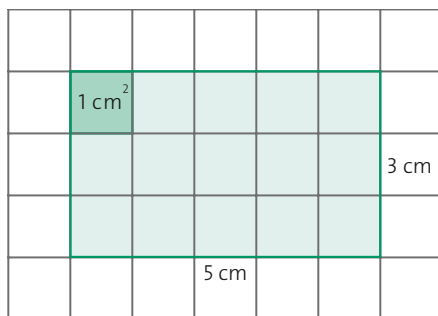
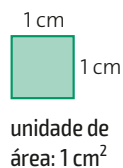


$$\text{área de } Q = \ell^2$$

sendo ℓ um número natural ou fracionário positivo.

Área do retângulo

O retângulo pintado abaixo contém 15 unidades de área. Portanto, sua área é de 15 cm^2 .



Fique atento!

Retângulo é todo quadrilátero que tem os quatro ângulos retos. Aqui também, quando falamos “área do retângulo”, estamos subentendendo “área da região retangular”. E nos demais polígonos nas próximas páginas também.

Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas no retângulo, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura:

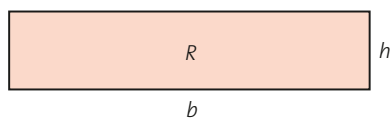
$$5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

Nesse caso, as medidas do comprimento e da largura são números naturais.

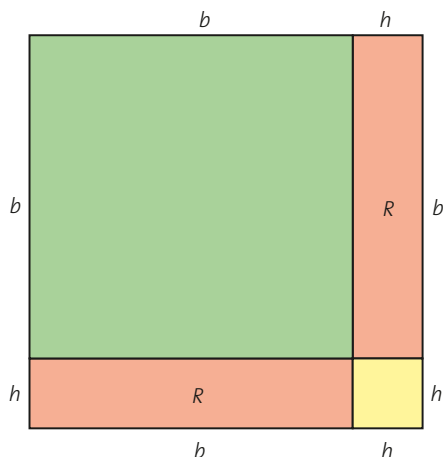
Vamos provar que, se a medida da base (b) e a medida da altura (h) forem números reais quaisquer, a área do retângulo R é dada por:

$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Consideremos um retângulo R de base b e altura h , em que b e h são números reais.



Construímos um quadrado cuja medida do lado é $b + h$, que contém duas cópias de R , e mais dois quadrados, um cujo lado mede b e outro cujo lado mede h .



A área desse quadrado (Q) é dada pelo quadrado de uma soma:

$$\text{área de } Q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad \textcircled{\text{I}}$$

Como os quadrados têm áreas iguais a h^2 e b^2 , concluímos que:

$$\text{área de } Q = b^2 + h^2 + 2 \cdot (\text{área de } R) \quad \textcircled{\text{II}}$$

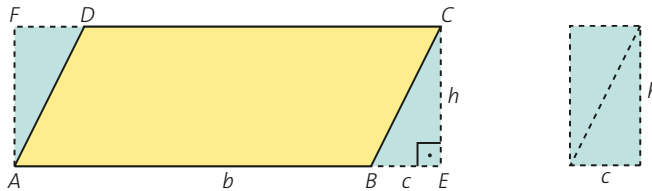
Comparando $\textcircled{\text{I}}$ e $\textcircled{\text{II}}$, chegamos a:

$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Área do paralelogramo

Vamos calcular a área do paralelogramo $ABCD$ tomando como base $\overline{AB}$ de medida b e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida h .

Examine a figura:



Fique atento!

Paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

O paralelogramo está contido em um retângulo de base $b + c$ e altura h . A área desse retângulo é dada por:

$$(b + c)h = bh + ch$$

Observe que o retângulo é formado pelo paralelogramo mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ch . Assim:

$$bh + ch = (\text{área do paralelogramo}) + ch$$

Portanto:

$$\text{área do paralelogramo} = bh$$

Isso significa que a área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma de suas bases pela medida da altura correspondente a essa base escolhida.

Fique atento!

Esse resultado não depende da base escolhida. Se tivéssemos escolhido outro lado como base e tomado a altura correspondente, o resultado seria o mesmo.

Área do triângulo

Conhecendo-se a área de um paralelogramo, fica muito simples determinar a área de um triângulo. Sabe por quê? Porque todo triângulo é metade de um paralelogramo de mesma base e mesma altura.

Veja:

Dado o triângulo ABC , cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e o paralelogramo $ABCD$. Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida h desse paralelogramo.

Já sabemos que, se a medida de $\overline{BC}$ é b , então a área do paralelogramo é bh . Mas os triângulos ABC e ADC são congruentes (pelo caso de congruência de triângulos ALA: têm um lado comum compreendido entre dois ângulos de mesma medida). Logo, esses triângulos têm áreas iguais.

Assim:

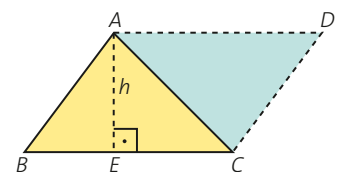
$$\text{área de } ABCD = 2 \cdot \text{área do triângulo } ABC$$

ou

$$bh = 2 \cdot \text{área do triângulo } ABC$$

Portanto:

$$\text{área do triângulo } ABC = \frac{bh}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}bh$$



Fique atento!

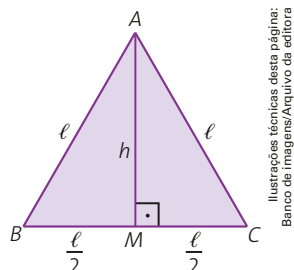
Esse resultado não depende da base escolhida. Temos três escolhas para a base b , cada uma com sua altura h correspondente. Seja qual for a escolha, o valor de $\frac{bh}{2}$ será sempre o mesmo.

Podemos escrever: a área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura correspondente.

Área de um triângulo equilátero

No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes (ℓ , ℓ e ℓ), todos os ângulos internos são congruentes (60° , 60° e 60°), e toda altura é também mediana e bissetriz.

Veja o cálculo da área, usando a base (ℓ) e a altura (h):



Ilustrações técnicas desta página:
Banco de Imagens/Arquivo da editora

Fique atento!

Mediana é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

O triângulo AMC é retângulo em M e, portanto, vale a relação de Pitágoras:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ (área do triângulo equilátero de lado ℓ).

Área do triângulo por meio da Trigonometria

Este caso se aplica quando são conhecidos dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles.

Observe que LAL (*Lado, Ângulo, Lado*) é um caso de congruência de triângulos, o que significa que um triângulo fica perfeitamente determinado quando conhecemos dois de seus lados e o ângulo formado por eles.

Consideremos o triângulo ABC representado na figura abaixo.

Suponhamos que sejam conhecidas as medidas dos lados AC e CB e o ângulo formado por eles, $\widehat{ACB}$. Vamos indicar essas medidas assim: $AC = b$, $CB = a$ e $\widehat{ACB} = \alpha$ para facilitar a demonstração.

Seja h a altura relativa à base $\overline{BC}$.

Sabemos que a área desse triângulo é dada por $S = \frac{ah}{2}$.

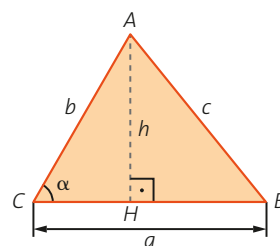
Se nós conhecemos α , podemos escrever $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, já que ACH é um triângulo retângulo.

Agora, podemos encontrar a altura em função de α e b :

$$h = b \cdot \sin \alpha$$

Assim, a área será dada por:

$$S = \frac{ab \cdot \sin \alpha}{2}$$



Para refletir

Se no triângulo retângulo podemos dizer que a área vale a metade do produto das medidas dos catetos, o que se pode concluir quanto ao valor do seno de 90° ? $\sin 90^\circ = 1$

O triângulo possui três alturas, cada uma dependendo do lado que considerarmos como base. Então, suponha que sejam conhecidos dois lados, AB e BC , por exemplo, e o ângulo formado por eles seja $\widehat{ABC}$. Verifique que a igualdade vista anteriormente também vale para eles.

Isso nos permite afirmar que:

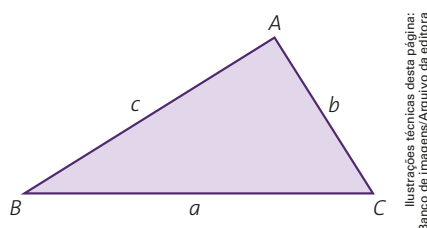
A área S de qualquer triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por eles.

Fique atento!

Esta conclusão se estende aos triângulos obtusângulos, ou seja, aqueles que têm um dos ângulos maior que 90° .

Área do triângulo sendo conhecidos os três lados

Conhecidos os três lados (a , b e c) de um triângulo, a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron.



Ilustrações técnicas desta página:
Banco de imagens/Arquivo da editora

Para refletir

O que significa semiperímetro de um polígono?

A metade da soma das medidas dos lados.

Fique atento!

Heron de Alexandria, geômetra e mecânico grego, esteve no auge de sua produção intelectual em torno do ano 62 a.C.

Sendo o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, é possível demonstrar que:

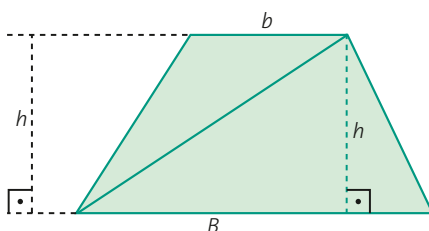
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Fórmula de Heron, muito útil quando} \\ \text{não conhecemos a altura do triângulo.} \end{array} \right)$$

Área de um trapézio

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas áreas já sabemos calcular. A área dessa figura plana será a soma das áreas das regiões em que a figura foi decomposta.

Por exemplo, vamos decompor a área de um trapézio traçando uma de suas diagonais.

Dividimos o trapézio em dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h .



Fique atento!

Trapézio é todo quadrilátero com um só par de lados paralelos (bases).

A área de um triângulo você já aprendeu a calcular. Portanto, a área do trapézio é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Então:

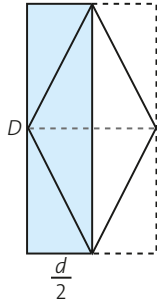
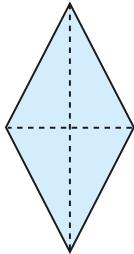
$$A = \frac{(B + b)h}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$$

Dizemos que a área de um trapézio é igual à semissoma das medidas das bases vezes a medida da altura.

Área de um losango

Todo losango é um paralelogramo, daí a área dele poder ser calculada como o produto da base pela altura. Entretanto, em geral, as dimensões de um losango são expressas pelas medidas de suas diagonais D e d .

Todo losango tem a mesma área de um retângulo com altura D e base $\frac{d}{2}$, como mostram as figuras:

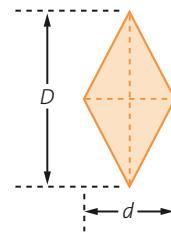


Fique atento!

Losango é todo quadrilátero que tem os quatro lados com medidas iguais.

Assim, a área de um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais. Veja:

$$A = D \cdot \frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{Dd}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{\text{diagonal maior} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$$



Fique atento!

Como todo quadrado é um losango, às vezes é conveniente calcular a área do quadrado em função das suas diagonais, que têm a mesma medida. Nesse caso, a área do quadrado é dada por $A = \frac{d^2}{2}$.

Área de um hexágono regular

O hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Temos que a área do triângulo equilátero é dada por:

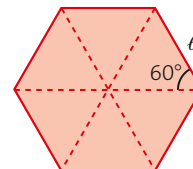
$$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

Logo, a área de um hexágono regular é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2}$$

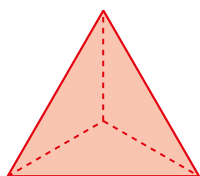
ou seja:

$$A = \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2}$$

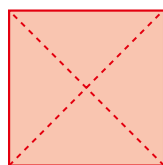


Área de um polígono regular

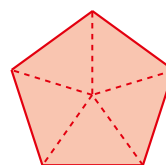
Observe alguns exemplos de polígonos regulares:



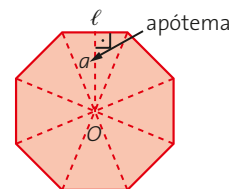
Triângulo equilátero
(polígono regular de três lados)



Quadrado
(polígono regular de quatro lados)



Pentágono regular
(polígono regular de cinco lados)



Octógono regular
(polígono regular de oito lados)

Fique atento!

Polígono regular é aquele que tem todos os lados e todos os ângulos internos congruentes. Ele pode sempre ser inscrito em uma circunferência.

Pode-se perceber que, se o polígono regular tem n lados, ele pode ser decomposto em n triângulos isósceles. Em cada um desses triângulos, a base é o lado (ℓ) e a altura é o apótema (a) do polígono regular.

A área de um polígono regular de n lados pode então ser escrita assim:

$$A = n \cdot \frac{\ell a}{2}$$

ou

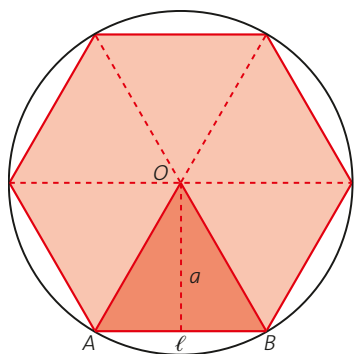
$$A = \frac{n\ell}{2} \cdot a$$

ou

$$A = pa$$

ou

$$A = \frac{aP}{2}$$



em que ℓ : lado
 a : apótema
 $n\ell$: perímetro ($2p$)
 p : semiperímetro
 P : perímetro

Para refletir

No pentágono regular temos $A = \frac{5}{2}\ell a$
 e no octógono regular temos

$$A = 4\ell a.$$

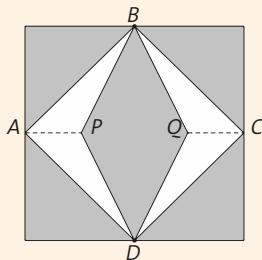
Escreva no caderno a área de um decágono regular em função do lado e do apótema. **5ℓa**

Exercício resolvido

passo a passo: exercício 6

Resolvido passo a passo

6. (Enem) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura ao lado.



Reprodução/Enem 2012

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $1/4$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m^2 , e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa R\$ 50,00 o m^2 . De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- a) R\$ 22,50 c) R\$ 40,00 e) R\$ 45,00
 b) R\$ 35,00 d) R\$ 42,50

1. Lendo e compreendendo

- a) O que é dado no problema?
 É dado o formato de um vitral, com suas áreas diferenciadas visivelmente, suas medidas e o preço do m^2 de cada tipo de vitral.
- b) O que se pede?
 Pede-se o custo dos materiais necessários para fabricação de um vitral.

2. Planejando a solução

Para simplificar a forma de solucionar tal problema, é bom dividir sua resolução em etapas:

- Cálculo da área do vitral confeccionado com o material representado pela parte sombreada, a qual é composta por quatro triângulos retângulos de catetos medindo 0,5 m e um losango de diagonal maior medindo 1 m e diagonal menor medindo 0,5 m.
- Cálculo da área do vitral confeccionado com o material representado pela parte clara.
- Soma dos produtos entre a área de cada parte pelo custo de cada tipo de material.

3. Executando o que foi planejado

Etapas I:

$$4 \times \text{área dos triângulos retângulos} = 4 \times \frac{(0,5)^2}{2} = 0,5$$

$$1 \times \text{área do losango} = \frac{(D \times d)}{2} = \frac{1 \times 0,5}{2} = 0,25$$

$$0,5 + 0,25 = 0,75$$

Logo, $0,75 m^2$ é a medida da área da parte sombreada.

Etapas II:

área da parte clara = área do vitral – área da parte sombreada $\Rightarrow$ área da parte clara = $(1)^2 - 0,75 = 0,25$
 Logo, $0,25 m^2$ é a medida da área da parte clara.

Etapas III:

Custo com material (representado pela parte sombreada) = $0,75 \cdot 30 = 22,50$

Custo com material (representado pela parte clara) = $0,25 \cdot 50 = 12,50$

Custo total = $22,50 + 12,50 = 35,00$

Logo, o custo total é de R\$ 35,00.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

5. Ampliando o problema

- a) Sabe-se que a fachada do edifício possui 80 m de altura, 40 m de comprimento e toda ela será decorada com vitrais. Sendo assim, qual o custo que o construtor terá para instalar os vitrais, sabendo-se ainda que a mão de obra para instalação é de R\$ 10,00 por m²?
- b) *Discussão em equipe* O custo total é de R\$ 144 000,00.
Com os colegas, monte outros tipos de vitrais compostos de outras formas geométricas e mais de dois tipos de materiais, definindo valores para cada um

deles. Ao final do trabalho, calcule o custo com o material para fabricação dos vitrais. Logo, vocês estarão exercitando os conhecimentos em geometria e na matemática em geral.

c) Pesquisa

Pesquise nas construtoras de sua região o custo médio de produção dos diferentes tipos de imóveis e, como contrapartida, o valor de venda desses imóveis. Ao final, conclua por que o ramo da construção civil teve um elevado crescimento na última década.

Exercícios



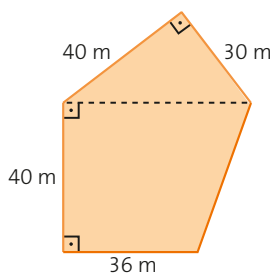
Atividade em dupla



Atividade em equipe

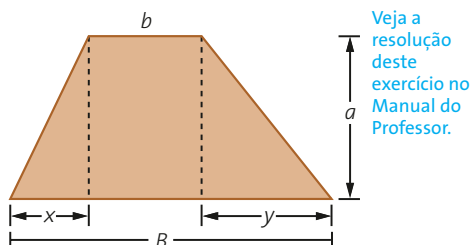


13. Feito o levantamento de um terreno, foram determinados os dados indicados na figura abaixo. Nessas condições, qual é a área do terreno? 2320 m^2



14. Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 20 m e 14 m, e altura 11 m. Nesse terreno, construiu-se uma piscina retangular de 8 m por 5 m. No restante do terreno foram colocadas pedras mineiras. Qual foi a área onde se colocou pedra? 147 m^2

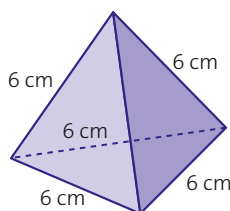
15. Mostre que a fórmula $A = \frac{(B + b)a}{2}$ pode ser obtida decompondo-se o trapézio como na figura a seguir.



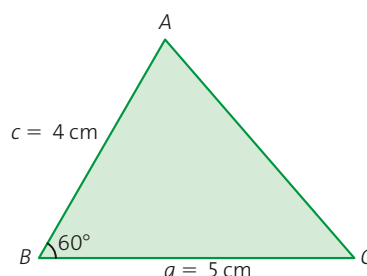
Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.

16. Um tetraedro regular é um sólido formado por quatro triângulos equiláteros. Qual é a área total da superfície do tetraedro regular ao lado?

$36\sqrt{3} \text{ cm}^2$



17. Determine a área do triângulo abaixo: $5\sqrt{3} \text{ cm}^2$

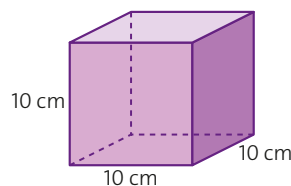


18. Em um triângulo ABC, dois lados medem 4 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área desse triângulo. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

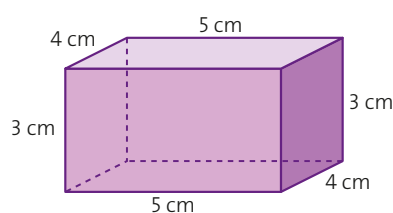
19. Qual é a área de um paralelogramo cujos lados medem 10 cm e 16 cm, sabendo que formam um ângulo de 30°? 80 cm^2

20. Um piso de cerâmica tem a forma hexagonal regular. O lado do piso mede 8 cm. Qual é a área desse piso?

21. Um cubo é um sólido formado por 6 quadrados. Determine a área total da superfície do cubo da figura abaixo. $A_T = 600 \text{ cm}^2$

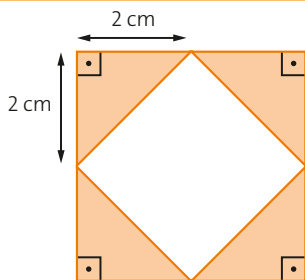


22. Um bloco retangular é um sólido formado por 6 retângulos. Determine a área total da superfície do bloco retangular da figura abaixo. 94 cm^2



23. Qual é a área de toda a parte colorida da figura ao lado? Qual é a área da região não colorida?

Região colorida:
8 cm²; região não colorida: 8 cm².



24. Um terreno tem forma triangular e as medidas dos seus lados são 17 m, 15 m e 8 m. Qual é a área desse terreno? 60 m²

25. (Unicamp-SP) Alguns jornais calculam o número de pessoas presentes em atos públicos considerando que cada metro quadrado é ocupado por 4 pessoas. Qual a estimativa do número de pessoas presentes numa praça de 4000 m² que tenha ficado lotada para um comício, segundo essa avaliação?

16 mil pessoas.

26. Geografia

(PUC-SP) Um mapa é feito em uma escala de 1 cm para cada 200 km. O município onde se encontra a capital de certo estado está representado, nesse mapa, por um losango que tem um ângulo de 120° e cuja diagonal menor mede 0,2 cm. Determine a área desse município.

800√3 km²

27. Um quadrado tem 8 cm de lado.

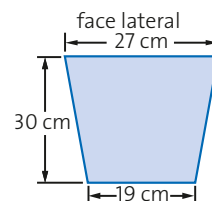
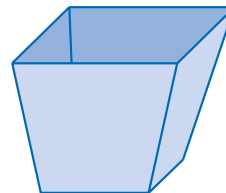
a) Se cada lado aumentar em 3 cm, a área aumentará em quantos centímetros quadrados?

57 cm²

b) Se cada lado aumentar em 20%, a área aumentará em quanto por cento?

44%

28. Uma cesta de lixo tem por faces laterais trapézios isósceles e por fundo um quadrado de 19 cm de lado. Desprezando a espessura da madeira, quantos metros quadrados de madeira foram necessários para fabricar essa cesta de lixo? 0,3121 m²

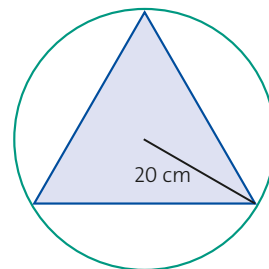


29. Calcule a área de uma cartolina cortada na forma de um hexágono regular de lado 10 cm. 150√3 cm²

30. A figura abaixo mostra uma folha circular de zinco, de onde foi recortado o triângulo equilátero colorido. Calcule a área desse triângulo.

300√3 cm²

$$\left(\ell_3 = r\sqrt{3} \text{ e } a_3 = \frac{r}{2}\right)$$



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Área do círculo

Veja o círculo ao lado inscrito em um quadrado.

Medida do lado do quadrado: $2r$.

Área do quadrado: $(2r)^2 = 4r^2$.

Então, a área do círculo com raio de medida r é menor do que $4r^2$.

Agora observe na segunda imagem o mesmo círculo circunscrito a um quadrado.

O quadrado tem diagonais de medidas $2r$ e $2r$.

Como o quadrado é um caso particular de losango, a área do quadrado pode ser obtida assim:

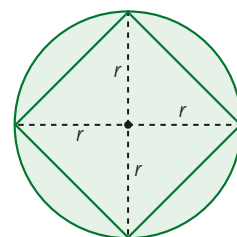
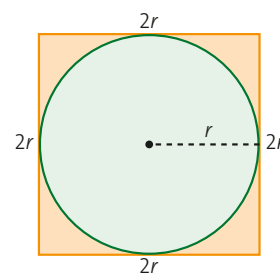
$$\frac{2r \cdot 2r}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$$

Então, a área do círculo com raio de medida r é maior do que $2r^2$.

Assim, em um círculo com raio de medida r , a área A é tal que:

$$2r^2 < A < 4r^2$$

ou seja, a área A é obtida pelo produto de um número próximo de 3 (que veremos que é o π) por r^2 .



Determinação da área do círculo

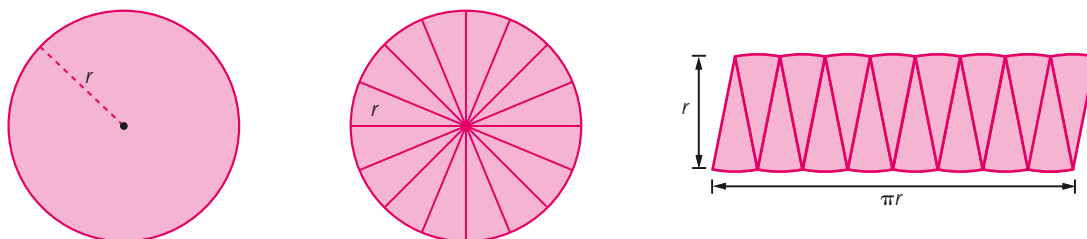
Vamos mostrar duas dentre muitas maneiras de encontrar a área do círculo.

1ª maneira: usando círculo dividido em setores

O círculo a seguir foi dividido em um número par de setores circulares que formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e sua altura mede r .

A área dessa figura, que é também a área do círculo, é $A = (\pi r)r = \pi r^2$, isto é:

$$A = \pi r^2$$

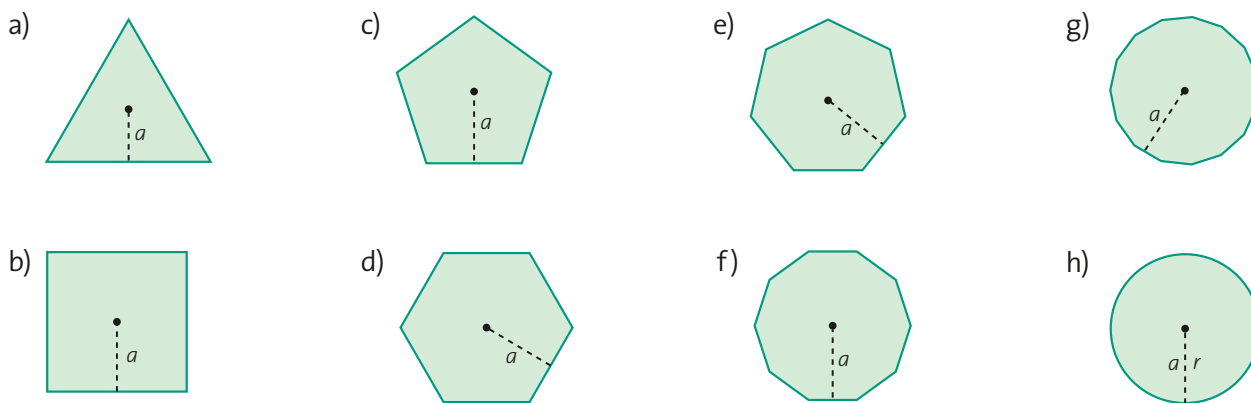


2ª maneira: usando polígonos regulares

Já vimos que a área de um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$, em que a é a medida do apótema e P é o perímetro.

Análise esta sequência.

O que você pode perceber?



Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

À medida que aumentamos suficientemente o número de lados dos polígonos regulares, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio (r) e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência ($2\pi r$).

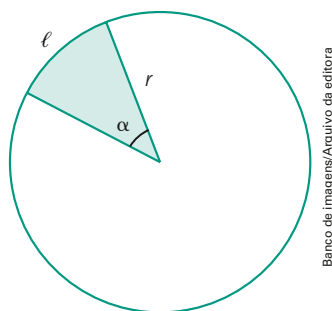
Assim, a área do círculo pode ser representada por:

$$A = \frac{aP}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2, \text{ ou seja,}$$

$$A = \pi r^2$$

Área do setor circular

A parte pintada da figura é conhecida como setor circular de um círculo de raio r . Todo setor circular tem um arco correspondente (ℓ) e um ângulo (α).



Fique atento!

Setor circular é a parte de um círculo limitada por dois raios e um arco.

O setor circular é uma fração do círculo, e sua área A é diretamente proporcional ao ângulo central α . Duplicando ou triplicando a medida do ângulo central, a área do setor circular duplica ou triplica. Um semicírculo, por exemplo, é um setor circular cujo ângulo central é 180° (metade de 360°) e sua área é metade da área do círculo.

O comprimento ℓ do arco também é proporcional ao ângulo central α . Então, podemos escrever que:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360^\circ} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi r}$$

Dependendo da informação conhecida (α em graus, α em radianos, ou comprimento ℓ do arco) usamos as razões acima.

Exercícios resolvidos

7. Calcule quantas pessoas cabem, aproximadamente, em uma praça circular de 20 m de raio, considerando 5 pessoas por metro quadrado. (Use $\pi = 3,14$.)

Resolução:

$$A = \pi r^2; \pi = 3,14; r = 20$$

$$A = 20^2 \cdot 3,14 = 1256 \text{ m}^2$$

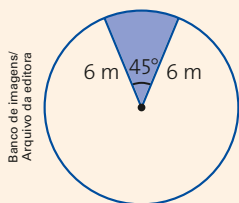
$$\text{Número aproximado de pessoas: } 1256 \cdot 5 = 6280.$$

Assim, cabem aproximadamente 6280 pessoas nessa praça.

8. Calcule a área do setor circular pintado abaixo.

Resolução:

$$\text{área do setor: } \frac{A_{\text{setor}}}{\pi \cdot 6^2} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \Rightarrow A_{\text{setor}} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 36 = \frac{9\pi}{2}$$



A área do setor circular pintado é $\frac{9\pi}{2} \text{ m}^2$.

A área do círculo e o número π

As tentativas para calcular a área de um círculo a partir de um diâmetro dado estiveram sempre presentes em toda a história da Matemática. Provavelmente, a mais antiga está no Papiro de Rhind, um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., que contém a resolução de 80 problemas matemáticos dos mais diferentes tipos.

O problema 50 do papiro de Rhind está escrito da seguinte forma:

Um campo circular tem diâmetro 9 khet. Qual é sua área?

No Capítulo 7 do Volume 1 existe um texto onde também é abordado um problema encontrado no Papiro de Rhind. Proponha uma rápida pesquisa para conhecimento geral sobre esta importante fonte histórica.

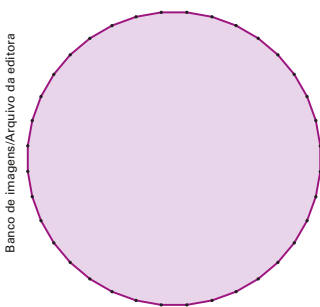
A resposta dada no papiro é 64 setat (que seria equivalente à unidade de medida khet elevada ao quadrado).

Na matemática do Egito antigo os enunciados e as sentenças não eram colocados à prova, ou seja, não havia demonstrações matemáticas, apenas uma coleção de regras práticas para calcular as coisas que necessitavam na vida diária. Entre essas regras, algumas eram exatas e outras eram simplesmente aproximações; entretanto, funcionavam bem para as exigências da época. Para o problema 50 a solução é apresentada da seguinte maneira:

Tire $\frac{1}{9}$ da solução, ou seja, 1, e restam 8. Faça a multiplicação 8 vezes 8; a solução dará 64, o montante dele, ou seja, a área de 64 setat.

Esse texto do antigo Egito está afirmando que a área de um círculo de diâmetro 9 é igual à área de um quadrado de lado 8. Vamos então avaliar qual é o valor de π utilizado na resolução deste problema.

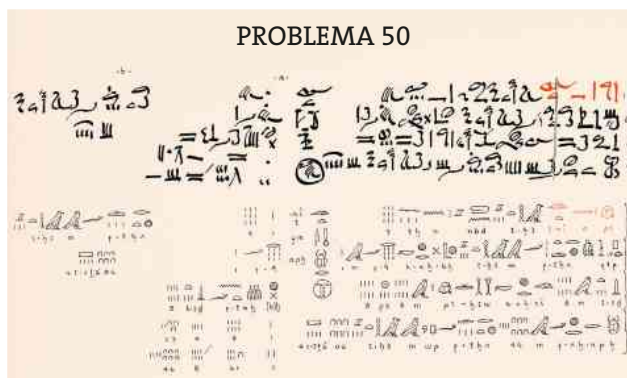
Sabemos que a área do círculo de diâmetro D é $\frac{\pi \cdot D^2}{4}$. Sabendo que para os egípcios antigos a área do círculo de diâmetro 9 é igual à de um quadrado de lado 8, temos que $\frac{\pi \cdot 9^2}{4} = 64$, ou seja, $\pi = \frac{256}{81}$, que é aproximadamente 3,1605. Para a época esse valor é muito bom, pois contém um erro menor que 0,6%, o que era perfeitamente adequado para os cálculos de que necessitavam.



Polígono regular de 36 lados.

Desde o século III a.C. até o século XVI a área de um círculo calculada a partir de um raio dado era aproximada pelas áreas de polígonos regulares inscritos com grande número de lados. Como se pode ver na figura ao lado, o polígono regular de 36 lados já parece “praticamente” um círculo. Na Grécia antiga (século III a.C.), Arquimedes de Siracusa calculou a área de um polígono regular de 96 lados e pôde estimar que o número que hoje representamos por π estava entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, entre 3,1408 e 3,1428.

A estimativa que Arquimedes fez é excelente, pois o erro em relação ao valor real é de aproximadamente 0,025% para $\frac{223}{71}$ e de aproximadamente 0,038% para $\frac{22}{7}$. Nos séculos seguintes, valores melhores para π foram sendo obtidos com polígonos de número de lados cada vez maiores, e o recorde absoluto para esse processo deve-se a Ludolph van Ceulen (1540–1610), que utilizou um polígono de 2 061 584 326 080 lados para conseguir obter π com 20 casas decimais exatas. Com a descoberta do Cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz, processos mais sofisticados puderam ser criados, e o número de casas decimais de π aumentou vertiginosamente.

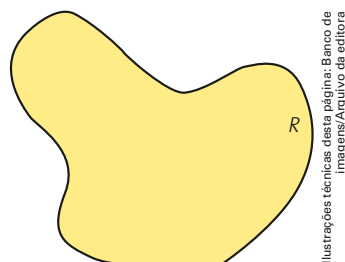


Tradução do problema 50 do Papiro de Rhind.

Reprodução/Associação Americana de Matemática, Oberlin, Ohio, EUA.

Cálculo aproximado de áreas

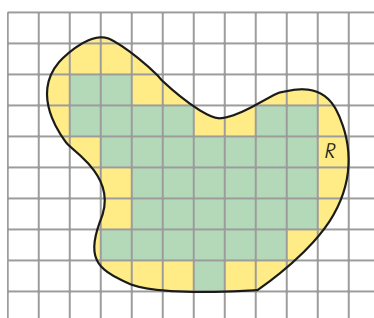
Você saberia calcular a área desta região R ?



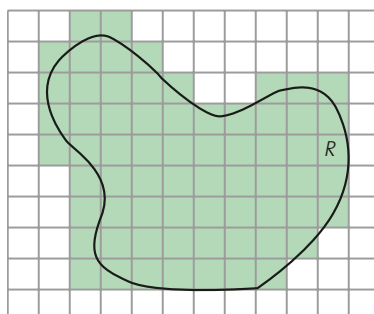
Que método podemos adotar para achar a área de regiões com formas parecidas com essa?

Para responder a essas perguntas usamos o seguinte procedimento:

Primeiro decalcamos essa região em uma malha quadriculada e contamos o maior número possível de quadrados inteiros que cabem dentro dela.



Em seguida, contamos o menor número possível de quadrados inteiros que cobrem R totalmente:



Assim:

- cabem 34 quadrados inteiros dentro da região R .

Dizemos que a **área por falta** da região R é de 34 ■.

- 67 quadrados inteiros cobrem a região R .

Dizemos que a **área por excesso** da região R é de 67 ■.

Conseguiu descobrir qual é a área?

A área da região R é maior do que 34 ■ e menor do que 67 ■.

Uma razoável aproximação para essa área é dada pela média aritmética dos dois valores encontrados:

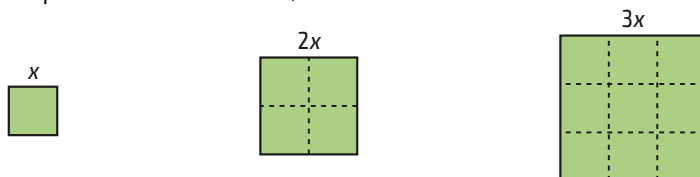
$$\text{área aproximada} = \frac{34 + 67}{2} = 50,5 \text{ ■}$$

Como a área do ■ da malha quadriculada é de $(0,5)^2 \text{ cm}^2 = 0,25 \text{ cm}^2$, então a área aproximada da região R é dada por $A \approx 50,5 \cdot 0,25 = 12,63 \text{ cm}^2$.

Razão entre áreas de polígonos semelhantes

Provavelmente você já estudou que polígonos semelhantes têm seus ângulos homólogos congruentes e seus lados homólogos proporcionais. Por exemplo, todos os quadrados são semelhantes entre si.

Vamos considerar três quadrados de lados x , $2x$ e $3x$:



Note que suas áreas são x^2 , $4x^2$ e $9x^2$, respectivamente. Isso mostra que, quando dobramos o lado, a área não dobra (ela quadruplica). E quando triplicamos o lado, a área não triplica (ela nonuplica, ou seja, é multiplicada por 9). Esses números sugerem que a área de um polígono não é proporcional ao seu lado, mas é proporcional ao **quadrado** do seu lado.

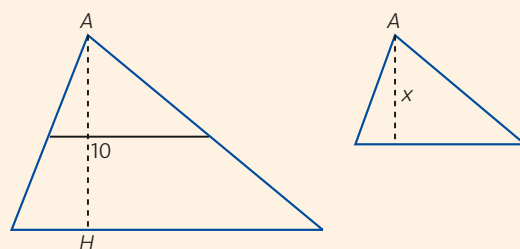
Assim, se dois polígonos forem semelhantes e a razão entre seus lados homólogos for k , então a razão entre suas áreas será k^2 .

Esse conceito também pode ser entendido pelo princípio da proporcionalidade: tomemos um retângulo de área $A(x, y)$. Um retângulo semelhante a esse, com lados kx e ky , terá área $A(kx, ky)$. Pelo princípio da proporcionalidade, $A(kx, ky) = k \cdot A(x, y) = k \cdot k \cdot A(x, y) = k^2 \cdot A(x, y)$. Podemos estender esse conceito para quaisquer superfícies semelhantes. Por exemplo, todos os círculos são semelhantes entre si, e a razão entre as áreas de dois círculos é igual ao quadrado da razão entre seus respectivos raios.

Observação: Esse conceito também se aplica à razão entre volumes de sólidos semelhantes, devidamente estendido. Como será mostrado mais adiante (quando for apresentada a ideia intuitiva de volume), a razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes será proporcional ao cubo da razão entre as medidas de seus elementos lineares (arestas, raios, diagonais, etc).

Exercícios resolvidos

9. Um triângulo escaleno de altura $AH = 10$ cm foi cortado perpendicularmente à sua altura AH , de forma que os dois pedaços resultantes tivessem a mesma área. A que distância do vértice A foi feito o corte?



Resolução:

Se os dois pedaços resultantes do corte (um triângulo e um trapézio) têm a mesma área, cada um deles tem metade da área do triângulo original. O triângulo menor é semelhante ao maior, pois o corte foi perpendicular à altura, portanto paralelo à base.

$$\text{A razão entre as alturas é } k = \frac{\text{altura}_2}{\text{altura}_1} = \frac{x}{10}.$$

A razão entre as áreas é:

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$$\frac{x}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \approx 7,1$$

Logo, o corte foi feito a aproximadamente 7,1 cm do vértice A .

10. A área de um triângulo retângulo é de 30 cm^2 . A área de um triângulo retângulo semelhante ao primeiro é de 120 cm^2 . Se a hipotenusa do primeiro triângulo mede 13 cm , quanto mede a hipotenusa do segundo triângulo?

Resolução:

A razão entre as hipotenusas é

$$k = \frac{\text{hipot}_2}{\text{hipot}_1} = \frac{x}{13}.$$

A razão entre as áreas é:

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{120}{30} = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Então, } \frac{x}{13} = 2 \Rightarrow x = 26.$$

Logo, a hipotenusa mede 26 cm .

11. A área de um dodecágono é de 10 cm^2 . Qual é a área de um dodecágono semelhante ao primeiro cujo perímetro é o triplo do perímetro do primeiro?

Resolução:

A razão entre os perímetros é $k = \frac{\text{perím}_2}{\text{perím}_1} = \frac{3}{1} = 3$. A razão entre as áreas é:

$$k^2 = 3^2 = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow 9 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 90$$

Logo, a área do segundo dodecágono é de 90 cm^2 .

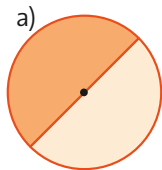
Exercícios

31. Tem-se um círculo de 20 cm de diâmetro. Determine:

- a) o perímetro desse círculo; $20\pi \text{ cm}$
b) a área desse círculo. $100\pi \text{ cm}^2$

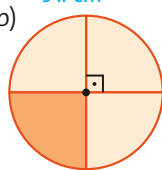
32. Determine a área dos setores circulares das figuras abaixo. O raio de todas mede 6 cm .

$18\pi \text{ cm}^2$

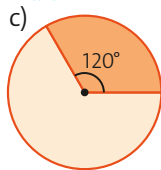


b)

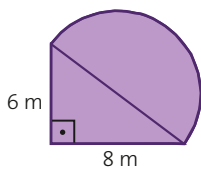
$9\pi \text{ cm}^2$



c)



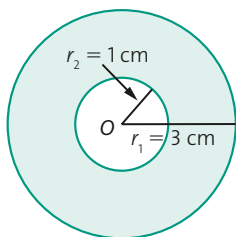
33. Um terreno tem a forma da figura ao lado. Na figura estão registrados alguns dados do terreno, que nos permitem calcular a sua área. Calcule a área desse terreno. $\left(\frac{25\pi + 48}{2}\right) \text{ m}^2$



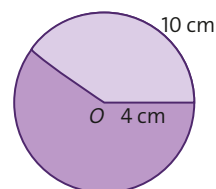
34. Determine a área do círculo inscrito a um triângulo equilátero de lado 12 cm . $12\pi \text{ cm}^2$

35. Determine a área de um círculo circunscrito a um hexágono regular de lado 8 cm . $64\pi \text{ cm}^2$

36. Quantos centímetros quadrados de alumínio são necessários para fazer uma arruela cujas dimensões estão na figura? $8\pi \text{ cm}^2$

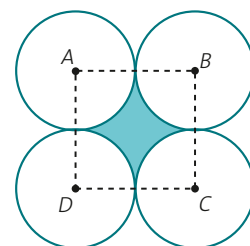


37. Calcule a área do setor circular da figura. 20 cm^2



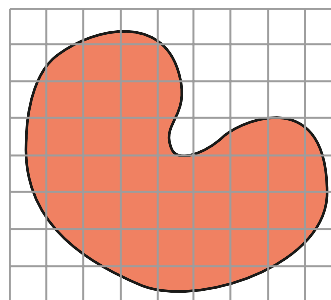
38. Dado um quadrado de lado 10 cm , qual é a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscritas e circunscritas nesse quadrado? $25\pi \text{ cm}^2$

39. O perímetro do quadrado ABCD da figura é 32 cm . Calcule a área da região colorida da figura. $16(4 - \pi) \text{ cm}^2$

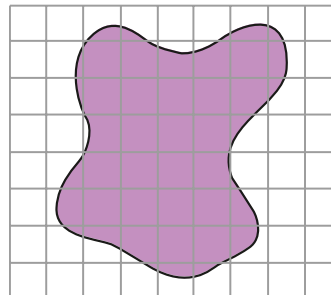


40. Calcule a área aproximada de cada uma destas regiões abaixo. Use o  como unidade de área.

a) $11,5 \text{ cm}^2$



b) 12 cm^2



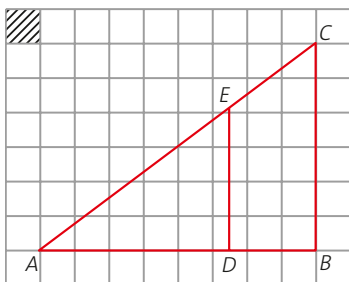
41. (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

- a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes dos fios? **4 cm e 8 cm**
 b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados? **16 cm² e 64 cm²**

42. (FGV-SP) Uma pizzaria vende pizzas com preços proporcionais às suas áreas. Se a pizza média tiver raio igual a 80% do raio da grande, seu preço será:

- a) 59% do preço da grande.
x b) 64% do preço da grande.
 c) 69% do preço da grande.
 d) 74% do preço da grande.
 e) 80% do preço da grande.

43. (Fuvest-SP) No papel quadriculado da figura a seguir, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado hachurado. DE é paralelo a BC . Para que a área do triângulo ADE seja a metade da área do triângulo ABC , a medida de AD , na unidade adotada, é:



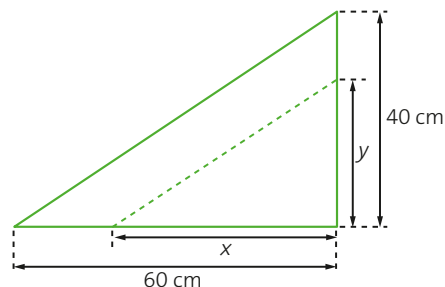
- x a) $4\sqrt{2}$.** d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.
 b) 4. e) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.
 c) $3\sqrt{3}$.

44. Física

(Faap-SP) Uma chapa de metal circular, com 1 m de raio, ficou exposta ao sol. Em consequência, sofreu uma dilatação de 1% na dimensão do raio. (Considere $\pi = 3,14$.) A área dessa chapa após a dilatação (em metros quadrados) é:

- a) 3,14.
 b) 3,32.
 c) 3,10.
x d) 3,20.
 e) 3,45.

45. (FEI-SP) Uma chapa metálica de formato triangular (triângulo retângulo) tem inicialmente as medidas indicadas e deverá sofrer um corte reto (paralelo ao lado que corresponde à hipotenusa do triângulo) representado pela linha tracejada, de modo que sua área seja reduzida à metade. Quais serão as novas medidas x e y ?



- a) $x = 30$ cm, $y = 20$ cm.
 b) $x = 40$ cm, $y = 30$ cm.
x c) $x = 30\sqrt{2}$ cm, $y = 20\sqrt{2}$ cm.
 d) $x = 20\sqrt{2}$ cm, $y = 30\sqrt{2}$ cm.
 e) $x = 90\sqrt{2}$ cm, $y = 60\sqrt{2}$ cm.

46. (Udesc) Se o raio de um círculo aumenta 10%, então o seu perímetro e a sua área aumentarão respectivamente:

- a) 10% e 10%. d) 10% e 0%.
x b) 10% e 21%. e) 0% e 10%.
 c) 21% e 21%.

47. (UFC-CE) A planta de um apartamento está confeccionada na escala 1 : 50. Então a área real, em metros quadrados, de uma sala retangular cujas medidas na planta são 12 cm e 14 cm é:

- a) 24. **x d) 42.**
 b) 26. e) 54.
 c) 28.

48. (Fazu-MG) Um agricultor leva 3 h para limpar um terreno circular de 5 m de raio. Se o raio do terreno fosse igual a 10 m, ele levaria:

- a) 8 h. d) 10 h.
 b) 15 h. **x e) 12 h.**
 c) 6 h.

49. (Unicamp-SP) Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 12,5 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área queimada aparece com 9 cm². Calcule:

- a) o comprimento que corresponde a 1 cm na mesma fotografia; **2,5 km**
 b) a área da superfície queimada. **56,25 km²**

4.2 Volumes

Nesta seção aprenderemos a calcular volumes dos principais sólidos.

Poliedros: prismas e pirâmides

Hans Von Manteuffel/Pulsar Images



Vista aérea da ilha de Antônio Vaz, em Recife (PE). A maioria dos prédios de uma região metropolitana tem a forma de poliedros convexos e poliedros não convexos, e, no geral, possui a forma de um prisma. O Palácio do Campo das Princesas, por exemplo, tem a forma de um poliedro não convexo. Fotografia de 2015.

1 Poliedros

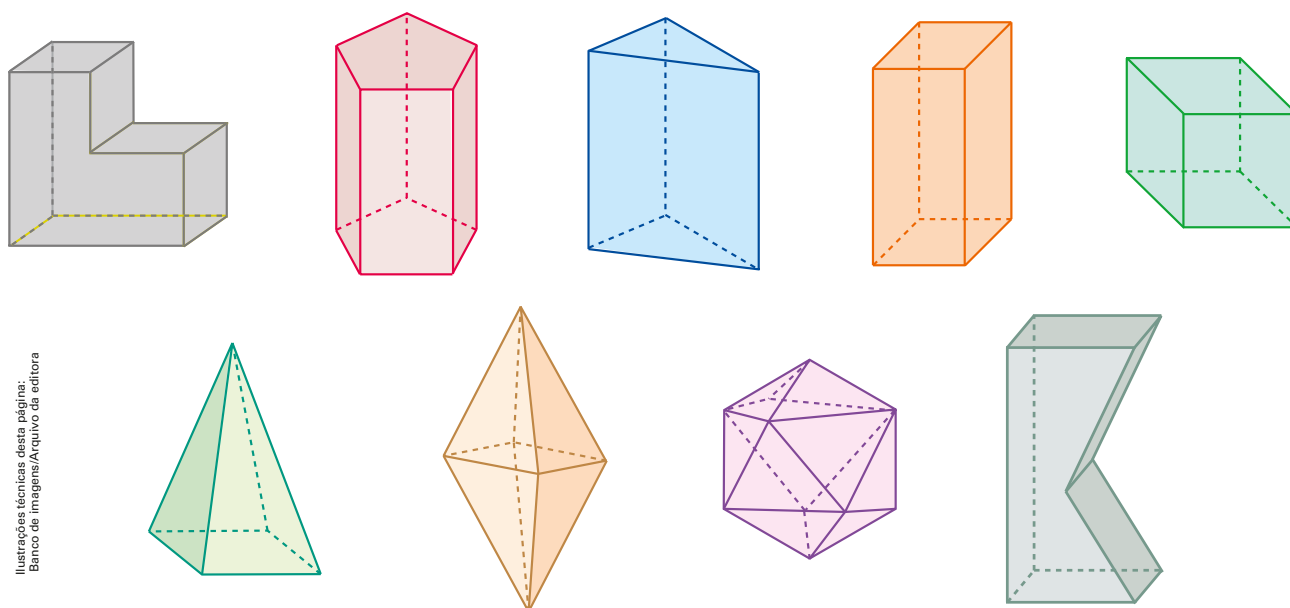
Em geral, destacamos os poliedros mais relevantes, pois a quantidade de tipos e formas existentes desses sólidos é enorme. No Museu da Ciência de Londres há uma seção dedicada aos poliedros, com uma variedade bastante grande de tipos.



Museu da Ciência de Londres, Inglaterra. Fotografia de 2015.

Museu da Ciência/Biblioteca Fotográfica de Ciência e da Sociedade, Londres, Inglaterra.

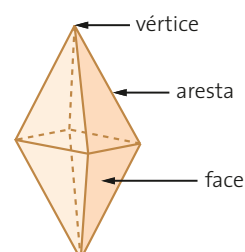
As figuras espaciais abaixo são exemplos de poliedros.



Ilustrações técnicas desta página:
Banco de Imagens/Arquivo da editora

Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de polígonos chamados **faces** e a região do espaço limitada por eles. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um outro único polígono. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de um polígono comum a exatamente duas faces é chamado **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.



Fique atento!

Cada vértice do poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.

i Agora que já definimos os elementos básicos de um poliedro (aresta, vértice e face), formem grupos de três colegas e, de acordo com a informação a seguir, respondam às questões.

Uma folha de papel é um poliedro (ela possui 3 dimensões, mesmo que a espessura do papel seja muito difícil de ver).

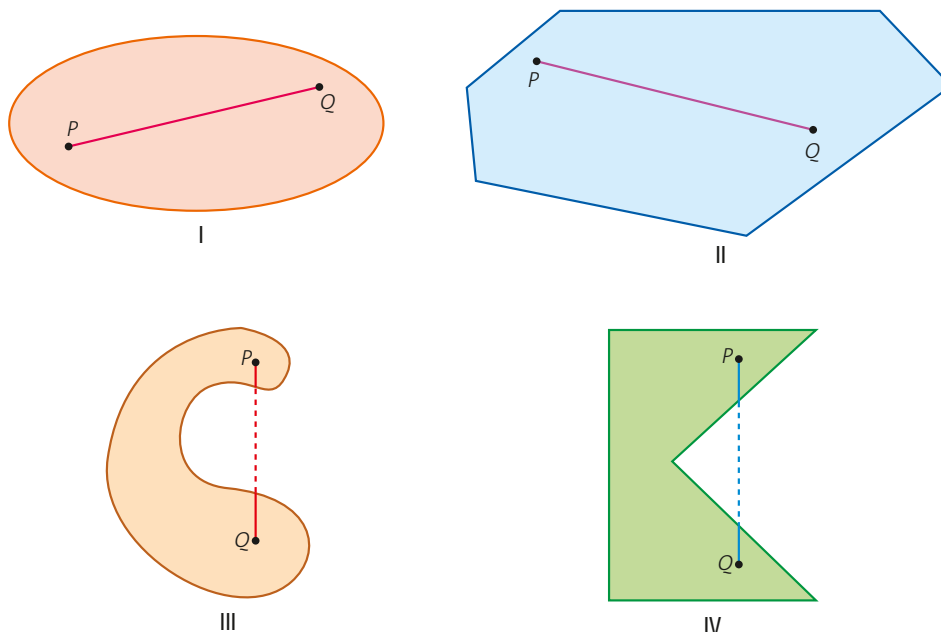
Qual é o número de faces de uma folha de papel? E o número de arestas? E de vértices? **6 faces; 12 arestas e 8 vértices.**

Após chegarem a um acordo no grupo, comparem suas respostas com as dos demais grupos.

A pergunta é incomum de propósito, a ideia é fazer os alunos refletirem sem que vejam um modelo. Peça aos grupos que exponham suas respostas e permita a discussão entre os grupos. Só depois de todos os grupos darem sua opinião, intervenha e revele as respostas corretas, aproveitando para institucionalizar esses conceitos.

Poliedro convexo e poliedro não convexo

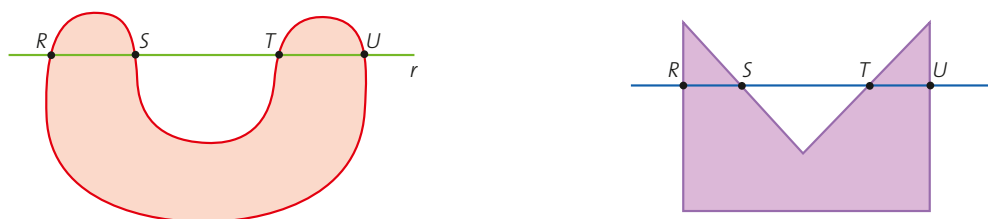
Vamos recordar o que é uma região convexa do plano.



Uma região do plano é **convexa** quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela. Nas figuras acima, **I e II** são regiões convexas e **III e IV** são regiões **não convexas** do plano. De modo equivalente, podemos dizer também que uma região plana é convexa se qualquer reta r desse plano intersecta seu contorno em, no máximo, dois pontos:



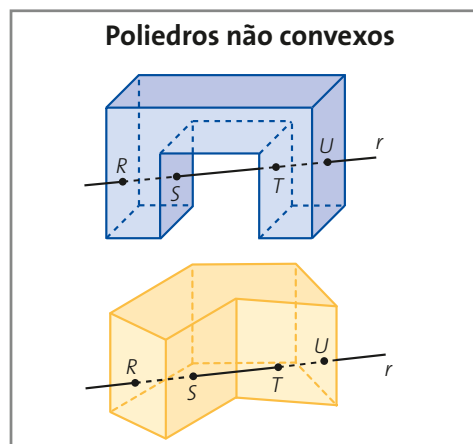
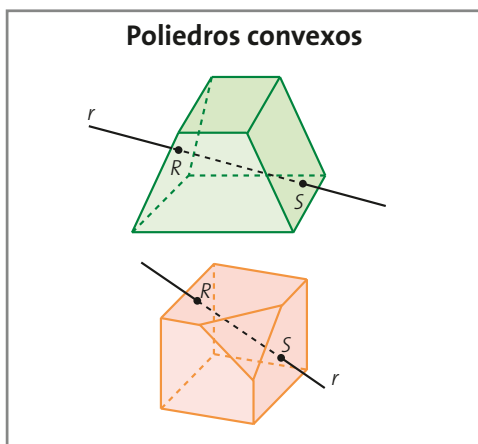
Regiões planas convexas



Regiões planas não convexas

Um polígono é convexo quando o segmento de reta que liga dois de seus pontos está sempre contido nele.

De modo equivalente, podemos dizer que um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos.



Para refletir

- Pode-se dizer também que um poliedro é convexo quando se situa do mesmo lado de qualquer plano que contenha uma de suas faces. Constate isso nos poliedros dos quadros acima.



ATENÇÃO!
Não escreva
no seu livro!

Exercícios

1. Analise o poliedro da figura ao lado e responda:

5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

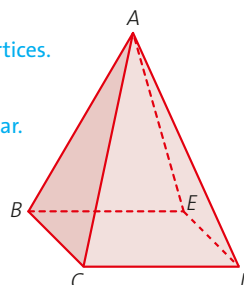
a) Qual é o número de faces, de arestas e de vértices?

b) Qual é a forma de cada face? 4 faces triangulares e 1 face quadrangular.

c) O vértice C é comum a quantas arestas? 3 arestas.

d) O vértice A é comum a quantas arestas? 4 arestas.

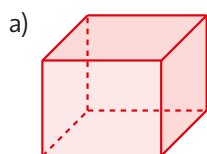
e) Qual é a posição relativa das retas determinadas pelas arestas $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$? Retas reversas.



Para refletir

- Qual é o número mínimo de faces que pode ter um poliedro? 4 faces

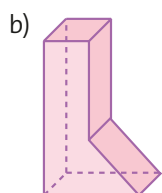
2. Classifique cada um dos poliedros em convexo ou não convexo.



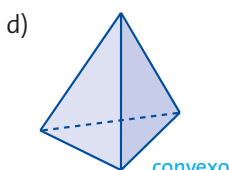
convexo



não convexo



não convexo



convexo

Fique atento!

O estudo que será feito a partir daqui vai considerar apenas os poliedros convexos. Por isso, sempre que aparecer a palavra **poliedro** deve-se subentender que ele é convexo.

Poliedros de Platão

Um poliedro é denominado **poliedro de Platão** se, e somente se, forem verificadas as seguintes condições:

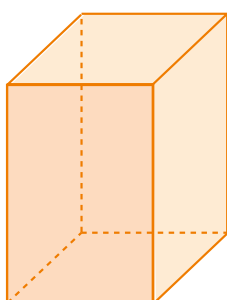
- Todas as faces têm o mesmo número de arestas.
- Em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.
- Vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

Dessa forma, todos os poliedros regulares convexos são poliedros de Platão.

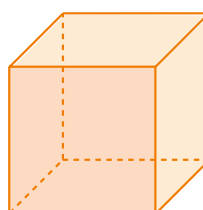
E, da mesma maneira que foi demonstrado que só existem cinco poliedros regulares convexos, podemos demonstrar que só existem cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Fique atento!

Em um poliedro de Platão as faces não precisam ser polígonos regulares.



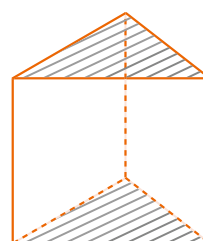
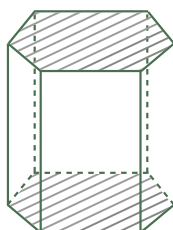
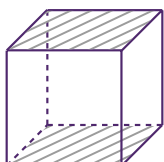
Este hexaedro é poliedro de Platão, mas não é regular, pois não é o cubo.



O cubo é poliedro regular e é poliedro de Platão.

4 Prismas

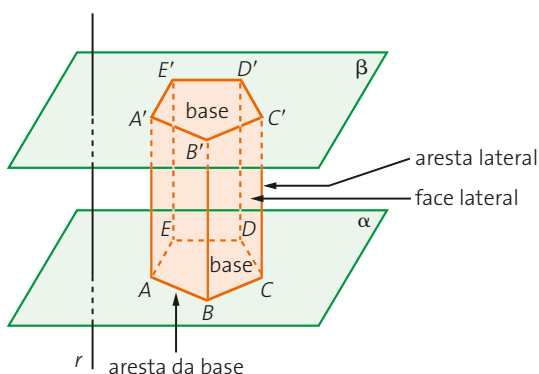
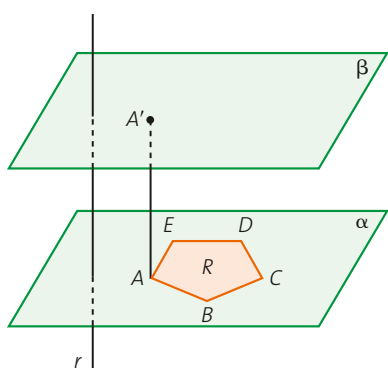
Entre os poliedros mais conhecidos, destacamos os prismas, que vamos estudar com mais detalhes. Veja alguns exemplos e procure perceber suas características.



As características que se destacam nestas imagens é a dupla de faces paralelas e opostas (faces horizontais das imagens) unidas por faces retangulares.

Construção e definição de prisma

Considere um polígono, por exemplo $ABCDE$, contido em um plano α . Escolha um ponto A' qualquer, não pertencente a α . Por A' trace o plano β paralelo a α . Pelos demais pontos B, C, D, E , trace retas paralelas a AA' que cortam β nos pontos B', C', D', E' . Essas retas são paralelas entre si.



Tome dois segmentos de reta consecutivos assim determinados, por exemplo $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. O quadrilátero $AA'B'B$ é plano, pois seus lados AA' e BB' são paralelos. Isso acarreta que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero $AA'B'B$ é um paralelogramo. Os paralelogramos assim determinados, juntamente com os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, determinam um poliedro chamado **prisma** de bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$.

A região do espaço ocupada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos de reta nos quais cada extremidade está em uma das bases.

As arestas AA' , BB' , CC' , DD' e EE' são chamadas **arestas laterais**. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento.

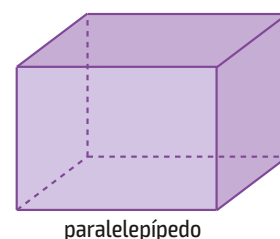
Arestas laterais consecutivas determinam paralelogramos e são chamadas **faces laterais** do prisma.

As bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são congruentes. A **altura** do prisma é a distância entre as bases.

Caso particular: o paralelepípedo

Quando a base é um paralelogramo, temos um prisma particular chamado **paralelepípedo**.

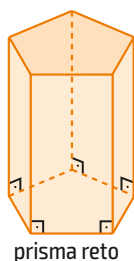
Paralelepípedos são prismas cuja particularidade é que qualquer de suas faces pode ser tomada como base, pois duas faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si.



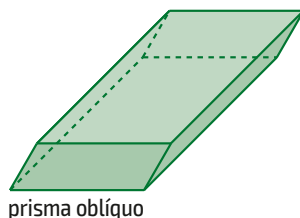
paralelepípedo

Prismas retos

O prisma é reto quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, e é oblíquo quando não o são.



prisma reto



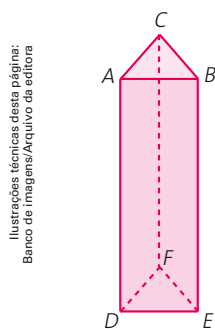
prisma oblíquo

Fique atento!
Retângulo é um caso particular de paralelogramo.

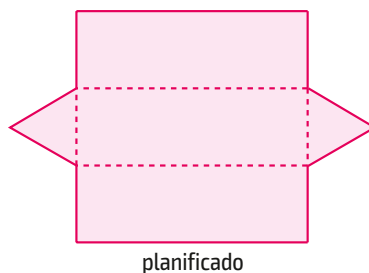
Assim, em um prisma reto, as faces laterais são retângulos.

De acordo com o polígono das bases, o prisma recebe nomes especiais. Veja alguns exemplos:

a) Prisma reto de base triangular ou prisma reto triangular



Ilustrações técnicas desta página:
Banco de Imagens/Arquivo da editora



planificado

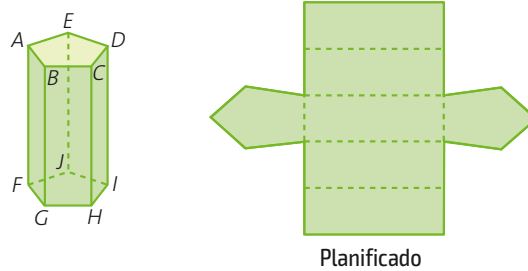
Fique atento!
As faces laterais são paralelogramos particulares, ou seja, retângulos.

Bases: triângulos ABC e DEF

Faces laterais: quadriláteros $ABED$, $ACFD$ e $BCFE$

Arestas laterais: $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ e $\overline{BE}$

b) Prisma reto de base pentagonal ou prisma reto pentagonal



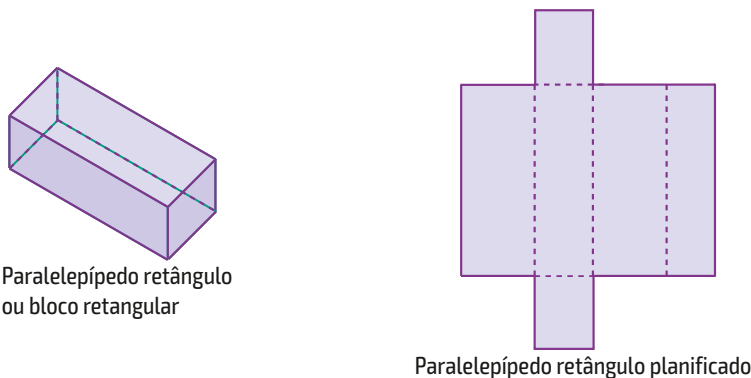
Bases: pentágonos $ABCDE$ e $FGHIJ$

Faces laterais: quadriláteros $BCHG$, $CDIH$, $DEJI$, $AEJF$ e $ABGF$ (retangulares)

Arestas laterais: $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{EJ}$, $\overline{CH}$ e $\overline{DI}$

c) Prisma reto de base retangular ou paralelepípedo retângulo ou bloco retangular

Quando o prisma é reto e a base é um retângulo, obtemos um **paralelepípedo retângulo** ou **bloco retangular**, no qual cada face também é um retângulo.



Paralelepípedo retângulo
ou bloco retangular

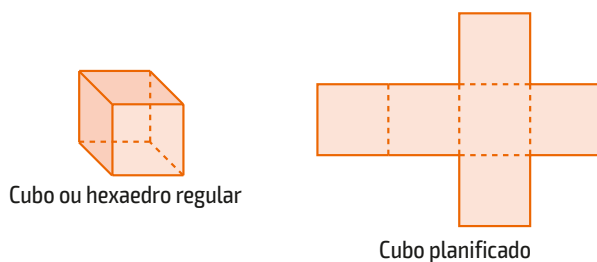
Fique atento!

Um paralelepípedo retângulo é um prisma reto em que qualquer face serve de base.

d) Cubo ou hexaedro regular

Quando, em um prisma reto, a base é um polígono regular, temos um **prisma regular**. Um exemplo é o cubo ou hexaedro regular, que é um caso particular de paralelepípedo retângulo, no qual cada face é um quadrado. Assim:

Prisma regular é um prisma reto cuja base é um polígono regular.

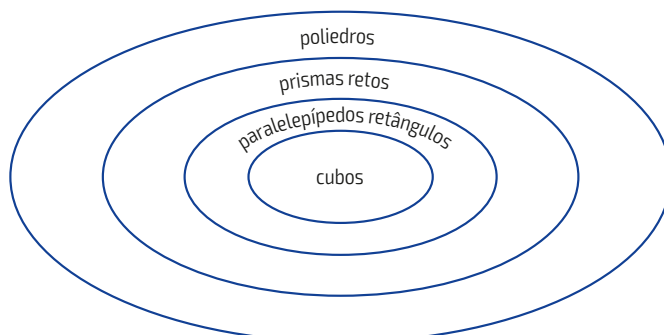


Cubo ou hexaedro regular

Fique atento!

Todo quadrado é um retângulo.
Todo retângulo é um paralelogramo.
Então, todo quadrado é um paralelogramo.

Examine essa classificação em um diagrama:

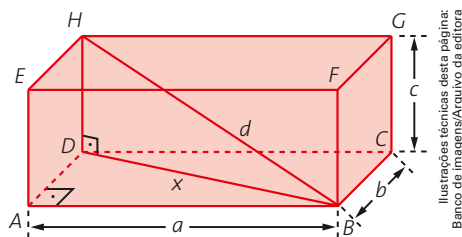


Fique atento!

Todo cubo é paralelepípedo, mas nem todo paralelepípedo é cubo.

Cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo e de um cubo

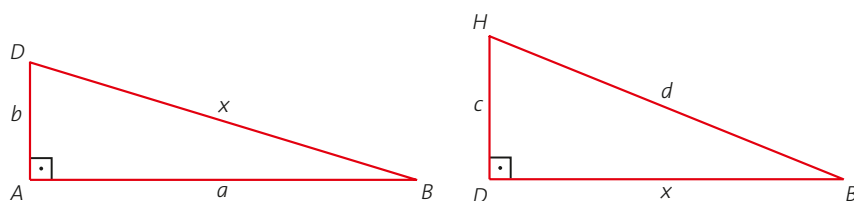
No paralelepípedo de dimensões a , b e c , temos:



d = medida da diagonal do paralelepípedo

x = medida da diagonal da base

Na figura podemos localizar dois triângulos retângulos:



- Como o triângulo ABD é retângulo em A , temos, pela relação de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + b^2 \text{ ①}$$

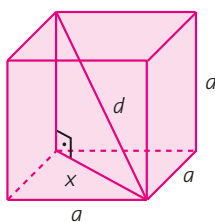
- Como o triângulo DBH é retângulo em D , temos, pela relação de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + c^2 \text{ ②}$$

- Substituindo ① em ②, vem:

$$d^2 = x^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

No cubo, como ele é um caso particular de paralelepípedo reto retangular, temos:



$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

$$d = a\sqrt{3}$$

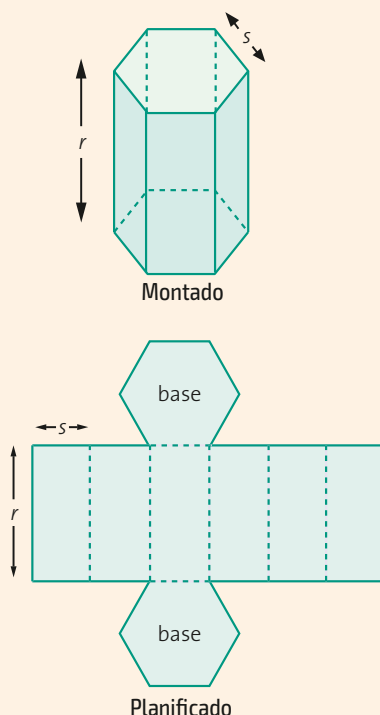
Área da superfície de um prisma

Em todo prisma, consideramos:

- superfície lateral:** é formada pelas faces laterais;
- área lateral (A_L):** é a área da superfície lateral;
- superfície total:** é formada pelas faces laterais e pelas bases;
- área total (A_T):** é a área da superfície total.

Exercícios resolvidos

3. Em um prisma hexagonal regular, a aresta da base mede 3 cm e a aresta da face lateral mede 6 cm. Calcule a área total.



Resolução:

Na figura, temos:

r : medida da aresta lateral = 6 cm

s : medida da aresta da base = 3 cm

Observando a figura, vemos que:

área lateral: $A_\ell = 6(r \cdot s) = 6(6 \cdot 3) = 108$;

$A_\ell = 108 \text{ cm}^2$

área da base: $A_b = \text{área do hexágono regular}$

O hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros:



Já estudamos neste volume que a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$.

Nesse caso, temos:

$$A_b = 6 \cdot \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2};$$

$$A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Como são duas bases, temos:

$$2A_b = 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}; A_b = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

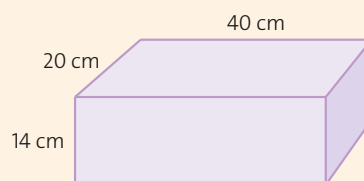
área total = área lateral + área das bases

Nesse caso, a área total é dada por:

$$A_T = A_\ell + 2A_b = (108 + 27\sqrt{3}); A_T = (108 + 27\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

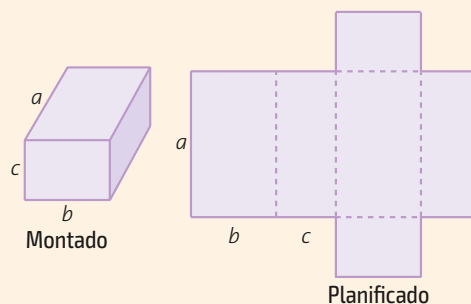
Como $\sqrt{3} \approx 1,7$, temos $A_T \approx 153,9 \text{ cm}^2$.

4. Uma indústria precisa fabricar 10 000 caixas de sabão com as medidas da figura abaixo. Desprezando as abas, calcule, aproximadamente, quantos metros quadrados de papelão serão necessários.



Resolução:

A caixa tem a forma de um paralelepípedo retângulo:



Todo paralelepípedo retângulo é formado por 6 faces:

- dois retângulos de medidas a e b ;
- dois retângulos de medidas a e c ;
- dois retângulos de medidas b e c .

Daí, temos:

$$\text{área total: } A_T = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$$

Nesse caso:

$$\text{área de cada caixa: } A_T = 2(40 \cdot 20 + 40 \cdot 14 + 20 \cdot 14) = 2(800 + 560 + 280) = 3280; A_T = 3280 \text{ cm}^2$$

Como são 10 000 caixas, temos:

$$A = 3280 \cdot 10\,000 = 32\,800\,000;$$

$$32\,800\,000 \text{ cm}^2 = 3280 \text{ m}^2$$

Portanto, serão necessários pelo menos 3280 m² de papelão.

Fique atento!

Se 1 m = 100 cm,
então 1 m² = 10 000 cm².

Exercícios



10. Quanto mede a diagonal de um paralelepípedo reto retangular no qual as dimensões são 10 cm, 6 cm e 8 cm? $10\sqrt{2}$ cm

11. Um cubo tem $10\sqrt{3}$ cm de aresta. Calcule a medida de sua diagonal. 30 cm

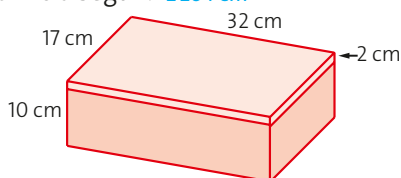
12. Em um cubo, a soma das medidas de todas as arestas é 48 cm. Calcule a medida da diagonal desse cubo. $4\sqrt{3}$ cm

13. A diagonal de um paralelepípedo reto retangular mede $20\sqrt{2}$ cm. As dimensões desse paralelepípedo são proporcionais aos números 5, 4 e 3, respectivamente. Calcule as dimensões desse paralelepípedo. 20 cm por 16 cm por 12 cm

14. Um cubo tem aresta de 6 cm. Qual é a área total desse cubo? 216 cm^2

15. Um paralelepípedo reto retangular tem dimensões de 4 cm, 5 cm e 8 cm. Qual é a área total desse paralelepípedo? 184 cm^2

16. Quantos centímetros quadrados de papelão são gastos para fazer uma caixa de sapatos do tipo e tamanho a seguir? 2264 cm^2

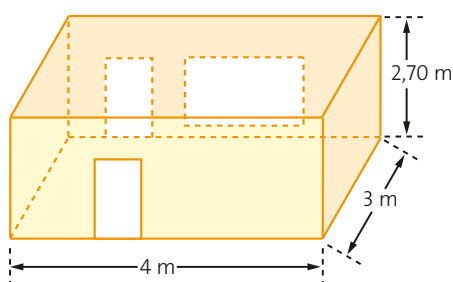


17. Um cubo tem área total de 96 m^2 . Qual é a medida da aresta do cubo? 4 m

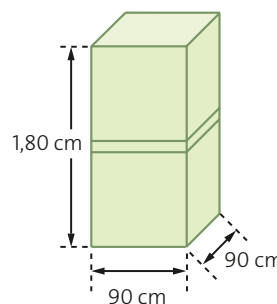
18. Em um prisma triangular regular, a aresta da base mede 4 cm e a aresta lateral mede 9 cm. Calcule a área lateral e a área total do prisma. $A_L = 108 \text{ cm}^2$; $A_T = 4(27 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

19. É dado um prisma pentagonal regular no qual a aresta da base mede 5 cm e a aresta lateral mede 10 cm. Calcule a área lateral do prisma. 250 cm^2

20. Quantos metros quadrados de azulejo são necessários para revestir até o teto as quatro paredes de uma cozinha com as dimensões da figura abaixo? Sabe-se também que cada porta tem $1,60 \text{ m}^2$ de área e a janela tem uma área de 2 m^2 . $32,6 \text{ m}^2$

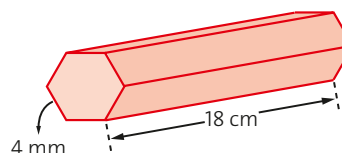


21. Quantos metros quadrados de madeira são gastos, aproximadamente, para fabricar 100 caixas para transportar geladeiras? (A forma e as medidas da caixa estão na figura ao lado.) 810 m^2

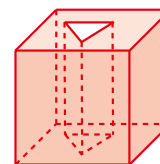


22. A diagonal de um cubo mede $10\sqrt{3}$ m. Qual é a área total desse cubo? 600 m^2

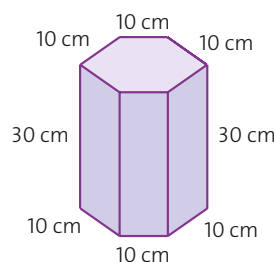
23. Quantos centímetros quadrados de papel adesivo são gastos para cobrir a superfície total de uma peça sextavada cuja forma e medidas estão na figura abaixo? $0,24(180 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$



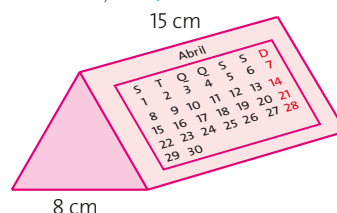
24. A figura ao lado nos mostra uma peça de enfeite. A aresta do cubo mede 20 cm. A cavidade, em forma de prisma regular de base triangular de aresta 5 cm, estende-se da face inferior à face superior do cubo. Determine a área total da peça. $\left(\frac{5400 - 25\sqrt{3}}{2}\right) \text{ cm}^2$



25. Quantas caixas do tipo e tamanho abaixo podem ser feitas com 41000 cm^2 de papelão? (Dado: $\sqrt{3} = 1,7$.) Aproximadamente 17 caixas.

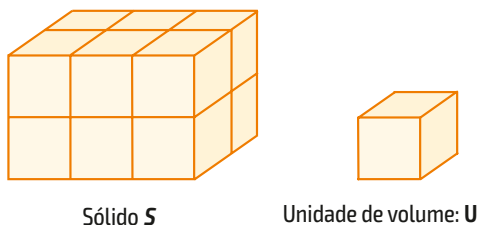


26. Um calendário tem o tipo e o tamanho da figura abaixo. Quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer esse calendário? (Dado: $\sqrt{3} = 1,7$.) $414,4 \text{ cm}^2$



5 Ideia intuitiva de volume

Suponha que queiramos medir a quantidade de espaço ocupado por um sólido S . Para isso, precisamos comparar S com uma unidade de volume. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes o sólido S contém a unidade de volume. Esse número é a medida do volume de S , que costumamos dizer, simplesmente, volume de S .



Sólido S

Unidade de volume: U

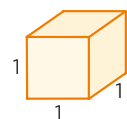
Por exemplo, o volume do sólido S acima é de 12 unidades de volume: 12 U , ou seja:

$$\text{volume de } S = 12 U$$

Cubo unitário

Vamos estabelecer como **unidade de volume** um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado **cubo unitário**.

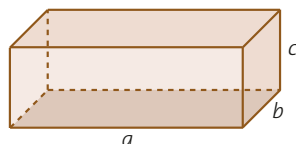
Qualquer cubo cuja aresta meça 1 terá, por definição, volume igual a 1.



Cubo unitário

Volume do paralelepípedo retângulo ou bloco retangular

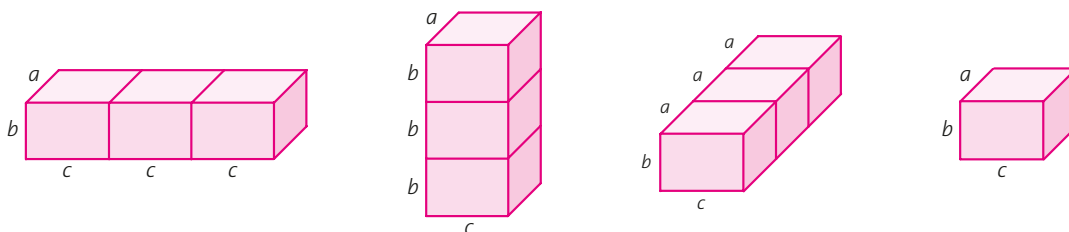
O bloco retangular é um poliedro formado por 6 faces retangulares. Ele fica determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c). Indicaremos o volume desse bloco retangular por $V(a, b, c)$ e o volume do cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$.



O volume do bloco retangular é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes duas das dimensões e multiplicarmos a terceira dimensão por um número natural qualquer, o volume também será multiplicado pelo mesmo número natural. Isso pode ser observado no exemplo abaixo:

$$V(a, b, 3c) = V(a, 3b, c) = V(3a, b, c) = 3V(a, b, c)$$

Ilustrações técnicas desta página:
Banco de imagens/Arquivo da editora

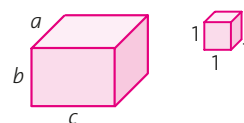


É possível provar que esse fato, constatado com um número natural, vale para qualquer número real positivo. Ou seja, mantidas constantes duas dimensões do bloco retangular, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Assim, temos:

$$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = ab \cdot V(1, 1, c) = abc \cdot V(1, 1, 1) = abc \cdot 1 = abc$$

Logo:

$$V(a, b, c) = abc$$



Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto das suas dimensões.

Observações:

- 1ª) Como ab indica a área da base e c indica a altura, é possível também indicar o volume do paralelepípedo retângulo assim:

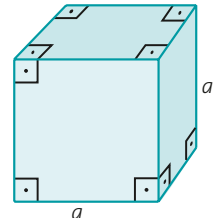
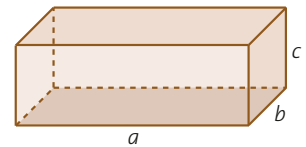
$$V = A_b h$$

em que $A_b = ab$ (área da base); $h = c$ (altura correspondente).

Assim, pode-se dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

- 2ª) Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo com todas as arestas de medidas iguais, seu volume é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a \quad \text{ou} \quad V = a^3$$



- 3ª) Agora podemos conceituar a razão entre volumes de sólidos semelhantes, citada na página 138. Se a razão entre as arestas homólogas (ou seja, que se correspondem) de dois blocos retangulares for igual a k , então a razão entre seus volumes será igual a k^3 . Com efeito, se $V(x, y, z)$ é o volume de um bloco retangular de arestas x, y e z , e $V(kx, ky, kz)$ é o volume do bloco de arestas kx, ky e kz , então: $V(kx, ky, kz) = k \cdot V(x, ky, kz) = k \cdot k \cdot V(x, y, kz) = k \cdot k \cdot k \cdot V(x, y, z) = k^3 \cdot V(x, y, z)$.

Podemos estender este conceito para quaisquer sólidos semelhantes. Por exemplo, todas as esferas são semelhantes entre si, e a razão entre seus volumes é o cubo da razão entre seus raios.

Assim, considerando dois sólidos semelhantes, temos:

Razão entre seus elementos lineares homólogos (arestas, raios, alturas, etc.): k

Razão entre suas áreas: k^2

Razão entre seus volumes: k^3

Exercícios resolvidos

passo a passo: exercício 7

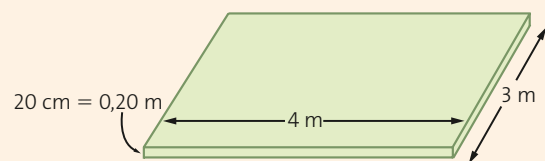
5. Qual é o volume de concreto necessário para construir uma laje de 20 cm de espessura em uma sala de 3 m por 4 m?

Resolução:

área da base: $A_b = 3 \cdot 4 = 12$; $A_b = 12 \text{ m}^2$

$V = \text{área da base} \cdot \text{altura} = A_b h = 12 \text{ m}^2 \cdot 0,20 \text{ m} = 2,40 \text{ m}^3$

São necessários $2,40 \text{ m}^3$ de concreto.



6. Sabendo que foram gastos $0,96 \text{ m}^2$ de material para montar a caixa cúbica cuja figura está abaixo, calcule o volume dessa caixa.

Resolução:

Nesse caso, a área total do cubo é:

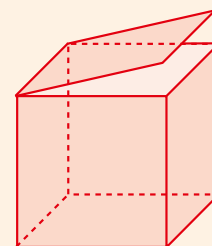
$0,96 \text{ m}^2 = 96 \text{ dm}^2 = 9600 \text{ cm}^2$

Sabendo que $A_T = 6a^2$, temos:

$9600 = 6a^2 \Rightarrow a^2 = 1600 \Rightarrow a = 40 \text{ cm}$

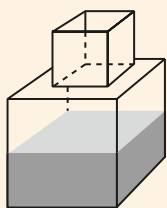
Como $V = a^3$, temos:

$V = (40 \text{ cm})^3 = 64000 \text{ cm}^3 = 64 \text{ dm}^3 = 0,064 \text{ m}^3$



Resolvido passo a passo

7. (Enem) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Reprodução/ENEM 2014

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

- a) 8. b) 10. c) 16. d) 18. e) 24.

1. Lendo e compreendendo

- a) O que é dado no problema?
É dado o formato do depósito de armazenamento de leite, um depósito composto por duas partes cúbicas, com a parte cúbica maior apresentando uma aresta com tamanho dobrado em relação à aresta da parte cúbica menor. Além disso, é informado o tempo que a torneira leva para encher certa parte do depósito.
- b) O que se pede?
Pede-se o tempo restante necessário para a torneira encher completamente o tanque, considerando que a torneira continue com a mesma vazão.

2. Planejando a solução

Uma das formas de solucionar o problema é calcular o volume do depósito, considerando que a aresta da parte cúbica maior seja igual a $2a$ e a da parte cúbica menor, a . Feito o cálculo do volume do depósito, comparamos o valor obtido com o volume já preenchido, e assim, por regra de três simples, encontraremos o tempo necessário para preencher o restante do depósito.

3. Executando o que foi planejado

- Volume do depósito de armazenamento

$$\begin{aligned} \text{Volume total} &= \\ &= (2a)^3 + (a)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_T = 8a^3 + a^3 = 9a^3 \end{aligned}$$

- Volume da parte que já está cheia

$$V_C = 2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3$$

- Cálculo do tempo necessário para preencher o restante do depósito

Volume a ser preenchido (V_P) = Volume total (V_T) – Volume já enchido (V_C)

$$V_P = 9a^3 - 4a^3 = 5a^3$$

Volume preenchido	→	Tempo gasto
$4a^3$		8 min
$5a^3$		x min

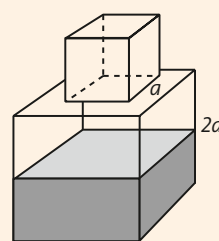
$$x = \frac{40a^3}{4a^3} = 10 \text{ min}$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa b.

5. Ampliando o problema

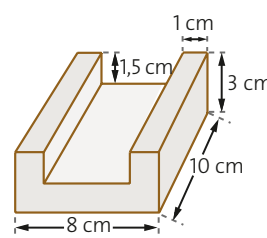
- a) Considere que o valor de a seja de 2 metros. A partir disso, considere que o valor do metro quadrado do material de que é feito o depósito é de R\$ 95,00. Quanto o fazendeiro gastou para construir o depósito? E qual será a vazão da torneira que o preenche, em litros/segundo (L/s)?
 Custo de produção do depósito = R\$ 10 640,00; vazão: aproximadamente 66,7 L/s.
- b) *Discussão em equipe*
Troque ideias com os colegas sobre o armazenamento dos produtos que consumimos diariamente, no processo de produção, transporte e venda. Discutam sobre a importância do correto armazenamento de produtos consumíveis e as consequências provenientes do mau armazenamento desses produtos.



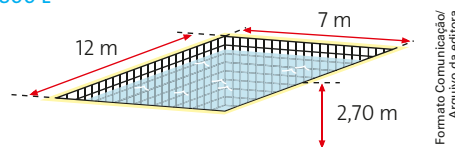
Exercícios

27. Qual é o volume de um cubo de aresta $5\sqrt{3}$ cm?
 $375\sqrt{3}$ cm³
28. Quanto mede a aresta de um cubo que tem 1000 dm³ de volume?
 10 dm
29. Em um paralelepípedo, as dimensões da base são 4 cm e 7 cm. Se a altura do paralelepípedo é de 5 cm, determine o seu volume.
 140 cm³
30. Quantos litros de água são necessários para encher uma caixa-d'água cujas dimensões são: 1,20 m por 0,90 m por 1 m? (Lembre-se: 1000 L = 1 m³.)
 1080 L
31. Quantos dados podem ser colocados em uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, se esses dados forem cubos de 2 cm de aresta?
 1000 dados.
32. Três cubos de chumbo, com arestas de 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente, são fundidos em uma só peça cúbica. Qual é o volume da peça cúbica obtida?
 1728 cm³

33. Qual é o volume de um sólido cuja forma e medidas estão na figura ao lado?
 150 cm³



34. Observe a piscina representada abaixo e as dimensões indicadas. Qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?
 226 800 L

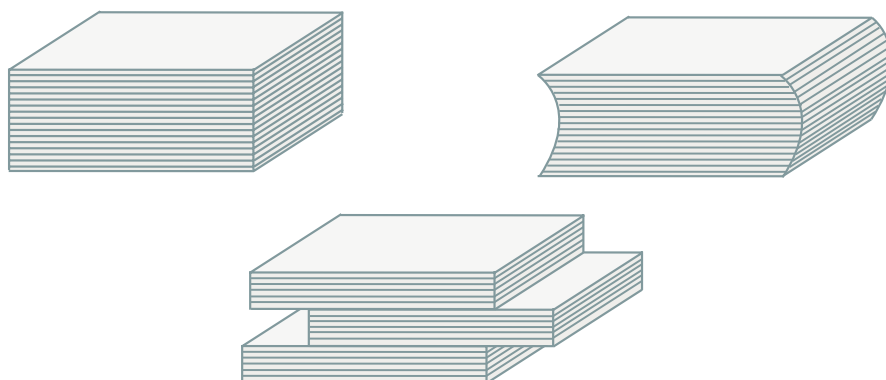


Formato Comunicação/Arquivo da editora

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

6 Princípio de Cavalieri

Imagine três pilhas com o mesmo número de folhas de papel, arrumadas de formas diferentes, como indicam as figuras:

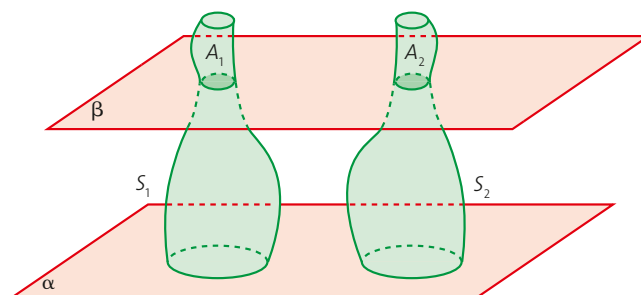


Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Note que qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecções de mesma área (uma folha); note também que as três pilhas têm volumes iguais (só mudam as formas).

Essa situação serve para ilustrar o **princípio de Cavalieri**, que veremos em seguida.

Vamos considerar os sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α . Consideremos também o plano β , paralelo a α , que, ao seccionar S_1 , também secciona S_2 , determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2 .



Nessas condições, **se para todo plano β temos $A_1 = A_2$** , então:

$$\text{volume } S_1 = \text{volume } S_2$$

É possível demonstrar o princípio de Cavalieri, mas aqui vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração. Veremos que esse princípio simplifica muito o cálculo de volumes.

Curiosidade



O italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que foi discípulo de Galileu, publicou em 1635 sua **teoria do indivisível**, contendo o que hoje é conhecido como “princípio de Cavalieri”. Entretanto, sua teoria, que permitia que se encontrasse rapidamente e com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, foi duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada.

Mal sabiam estes que o princípio de Cavalieri seria um dos pilares do que hoje conhecemos como cálculo integral, ajudando a definir a noção de integral.

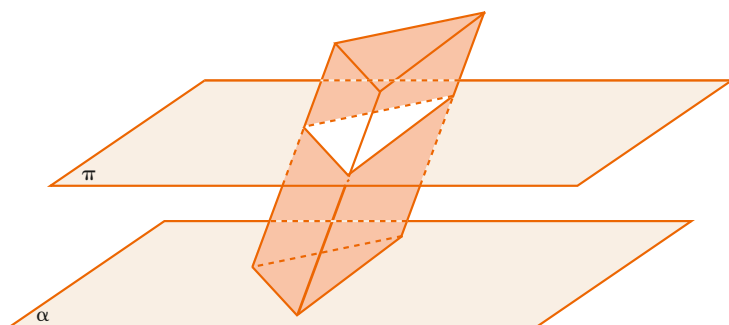
[...] em 1647 Cavalieri publicou a obra *Exercitationes geometricae sex*, na qual apresentou de maneira mais clara sua teoria. Esse livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII. Cavalieri também escreveu sobre Astronomia e Óptica. [...]

Disponível em: <<http://ecalculo.if.usp.br/historia/cavaliere.htm>>. Acesso em: 6 maio 2016.

7 Volume do prisma

Para calcular o volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

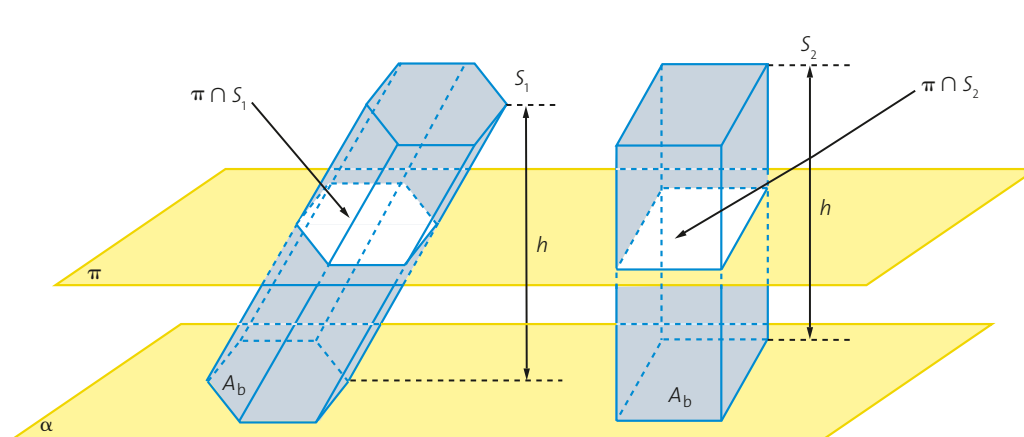
Inicialmente, observamos que, em um prisma qualquer com a base contida em um plano α , se π é paralelo a α , a secção determinada por π no prisma será sempre congruente à base, e por isso essa secção e a base terão sempre áreas iguais.



Fique atento!

Em todo prisma, uma secção paralela à base é congruente a essa base.

Podemos agora calcular o volume de um prisma qualquer, utilizando o paralelepípedo retângulo como auxílio.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos considerar um prisma S_1 , cuja área da base é A_b e a altura é h , e também um paralelepípedo retângulo S_2 , cuja área da base é A_b e a altura é h . O plano α que contém as bases é horizontal. Qualquer plano horizontal π que secciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $\pi \cap S_1$, cuja área é igual a A_b , e no paralelepípedo retângulo S_2 determina a secção $\pi \cap S_2$, cuja área é igual a A_b .

Como área $(\pi \cap S_1) = A_b$ e área $(\pi \cap S_2) = A_b$, para qualquer plano horizontal π temos:

$$\text{área}(\pi \cap S_1) = \text{área}(\pi \cap S_2)$$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que:

$$\text{volume do prisma} = \text{volume do paralelepípedo retângulo}$$

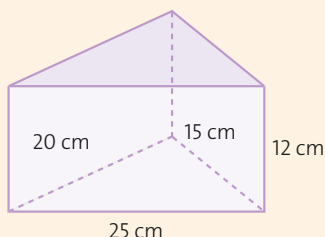
Como o volume do paralelepípedo retângulo é obtido multiplicando a área da base pela altura, temos:

$$\text{volume do prisma} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

$$V = A_b h$$

Exercícios resolvidos

8. Calcule o volume do prisma reto indicado na figura abaixo, cuja base é um triângulo retângulo.



Resolução:

A base desse prisma é um triângulo retângulo de catetos 15 cm e 20 cm:

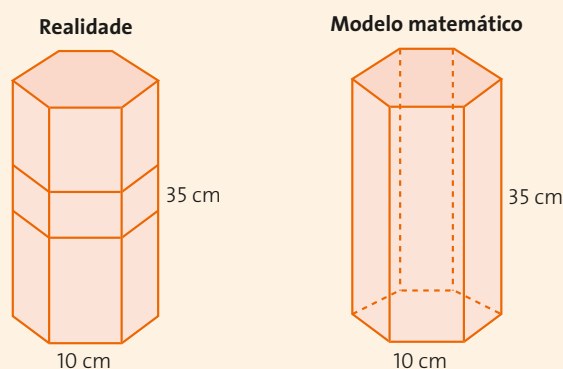
$$A_b = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

A altura do prisma é de 12 cm. Seu volume é:

$$V = A_b h = 150 \cdot 12 = 1800$$

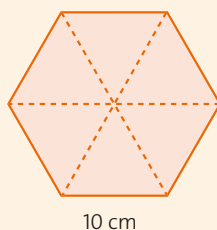
Logo, o volume do prisma é de 1800 cm^3 .

9. Queremos encher de areia a caixa indicada na figura abaixo à esquerda. Qual é o volume dessa caixa?



Resolução:

A área da base é a área de um hexágono regular cujo lado mede 10 cm.



Sabemos que o hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros e que a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$.

Logo, a área da base é dada por:

$$A_b = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$$

O volume do prisma é dado por $V = A_b h$, sendo $A_b \approx 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e $h = 35 \text{ cm}$.

$$V = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 35 \text{ cm} = 5250\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 9090 \text{ cm}^3.$$

O volume dessa caixa é de, aproximadamente, 9090 cm^3 , ou, aproximadamente, 9 litros.

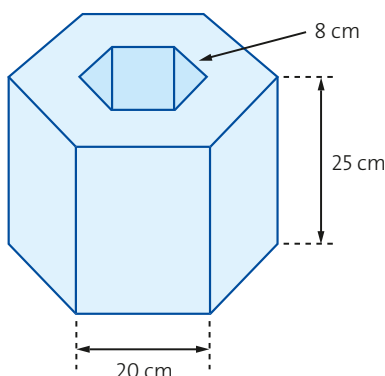
Exercícios



35. Determine o volume de um prisma triangular regular no qual a aresta da base mede 4 cm e a altura mede $10\sqrt{3}$ cm. **120 cm^3**

36. Uma barra de ouro é fundida na forma de um prisma cuja base é um trapézio. As bases desse trapézio medem 8 cm e 12 cm e a altura da barra é 5 cm. O comprimento da barra é 30 cm. Qual é o seu volume? **1500 cm^3**

37. Calcule o volume de uma peça de metal cuja forma e medidas estão na figura abaixo: **$12\ 600\sqrt{3}\text{ cm}^3$**

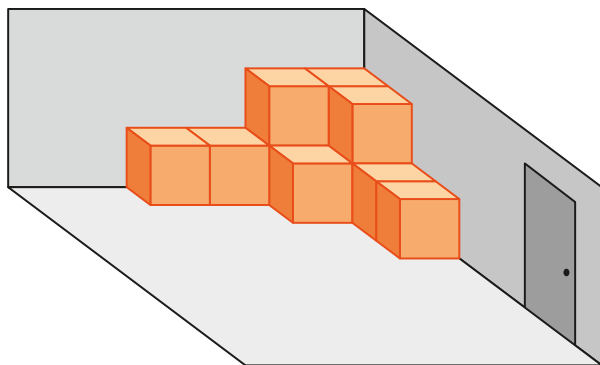


38. A área lateral de um prisma triangular regular é 36 cm^2 . A altura do prisma é o triplo da aresta da base. Calcule o volume do prisma. **$6\sqrt{3}\text{ cm}^3$**

39. O volume de um prisma regular de base quadrada é 700 cm^3 . O perímetro da base é de 40 cm. Calcule a altura e a área total do prisma.
 $h = 7\text{ cm}$; $A_T = 480\text{ cm}^2$

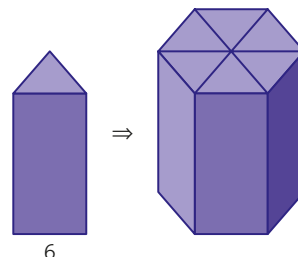
40. A base de um prisma reto é um hexágono regular de lado 8 cm. As faces laterais desse prisma são quadradas. Calcule o volume e a área total do prisma.
 $V = 768\sqrt{3}\text{ cm}^3$; $A_T = 192(2 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$

41. No canto da sala, foram empilhados alguns cubos, como mostra a figura.



Todos os cubos têm a mesma medida da aresta, que mede 1 m. Qual é o volume total dos cubos empilhados na sala? **11 m^3**

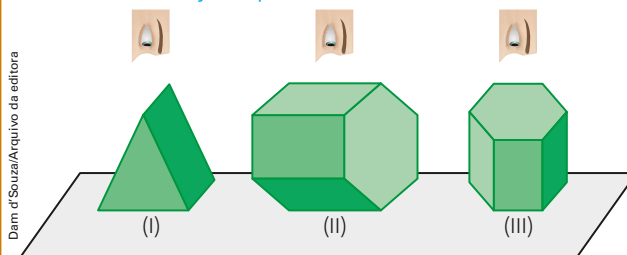
42. Seis prismas triangulares regulares de aresta da base 2 cm foram juntados formando um prisma hexagonal regular, como mostra a figura:



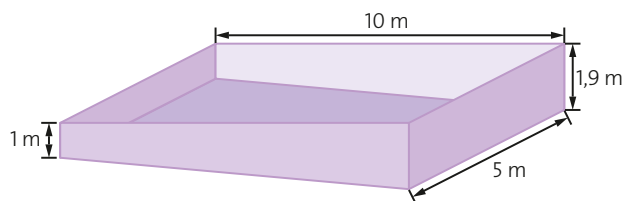
a) O volume total dos 6 prismas triangulares somados é igual, maior ou menor que o volume do prisma hexagonal? Justifique. **Igual.**

b) A área total dos 6 prismas triangulares somados é igual, maior ou menor que a área total do prisma hexagonal? Justifique. **Maior.**

43. Uma pessoa observa de cima cada um destes prismas, conforme indica a figura. Desenhe no caderno o que ela vê em cada caso. Lembre-se de que o contorno de uma figura é sempre aparente, ou seja, nós o vemos. *Veja a resposta deste exercício no Manual do Professor.*



44. Antônio é proprietário de uma chácara e decidiu fazer uma piscina para seus filhos. Para isso quer utilizar uma área de 5 m de largura por 10 m de comprimento. Antônio quer que sua piscina tenha uma profundidade de 1 m em um lado e uma profundidade de 1,90 m em outro lado, como mostra a figura:



Quantos metros cúbicos serão necessários para que Antônio encha essa piscina de modo que falte 0,4 metro, na altura, para enchê-la totalmente?

- x a) $52,5\text{ m}^3$ d) $9,5\text{ m}^3$
b) $72,5\text{ m}^3$ e) 57 m^3
c) 95 m^3

Dam d'Souza/Arquivo da editora

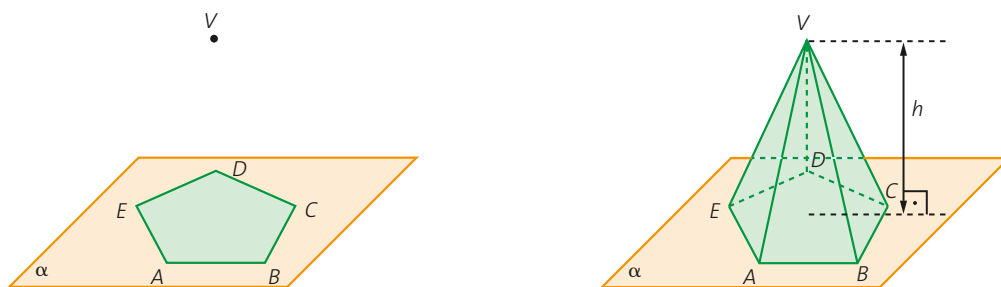
Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

8 Pirâmides

Construção e definição de pirâmide

Considere um polígono, por exemplo $ABCDE$, contido em um plano α e um ponto V exterior ao plano do polígono.

Traçamos os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$. Cada dois vértices consecutivos de $ABCDE$ determinam com V um triângulo. Esses triângulos, junto com o polígono $ABCDE$, determinam um poliedro chamado **pirâmide** de base $ABCDE$ e vértice V .



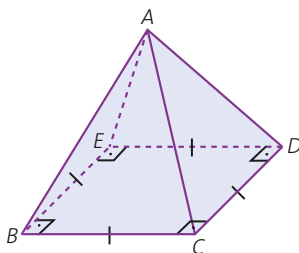
A região do espaço ocupada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice V aos pontos do polígono (base).

A distância do vértice ao plano da base, que indicamos por h , é chamada **altura** da pirâmide.

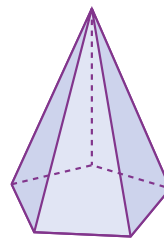
Os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são chamados **arestas laterais**, e os triângulos VAB , VBC , VCD , VDE e VEA são chamados **faces laterais** da pirâmide.

Veja a seguir alguns exemplos de pirâmides:

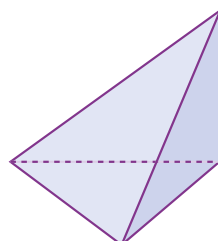
1ª)



2ª)



3ª)



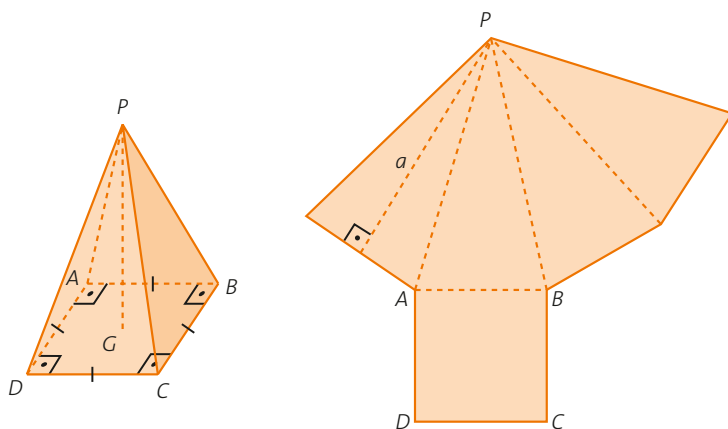
A 1ª pirâmide, $ABCDE$, é uma pirâmide de base quadrada (ou pirâmide quadrangular); o polígono $BCDE$ é sua base, $\overline{AC}$ é uma aresta lateral, $\overline{BC}$ é uma aresta da base e o triângulo ACD é uma das faces laterais.

A 2ª é uma pirâmide de base pentagonal (ou pirâmide pentagonal) e a 3ª tem base triangular (tetraedro).

Pirâmide regular

Pirâmide regular é uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular.

Vamos considerar uma pirâmide cuja base é um quadrado e com arestas laterais congruentes:



Pirâmide planificada

Fique atento!

Polígono regular é o que tem todos os lados e todos os ângulos internos congruentes. Ele pode sempre ser inscrito em uma circunferência, cujo centro é considerado também centro do polígono regular.

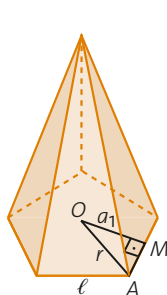
Essa pirâmide é regular, pois sua base é um polígono regular (quadrado) e suas arestas são congruentes (pirâmide reta).

Nesse caso, podemos ainda afirmar que:

- o segmento de reta ($\overline{PG}$) que liga o vértice ao centro da base é a altura da pirâmide;
- as faces laterais são triângulos isósceles e congruentes;
- a altura de cada face lateral é chamada de **apótema** da pirâmide regular (a).

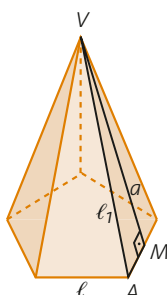
Observação: Em toda pirâmide regular devemos destacar quatro importantes triângulos retângulos nos quais aparecem: a aresta da base (ℓ), a aresta lateral (ℓ_1), o raio da circunferência circunscrita à base (r), o apótema da pirâmide (a), o apótema da base (a_1) e a altura da pirâmide (h).

Veja, em uma pirâmide regular pentagonal, a aplicação da relação de Pitágoras nestes triângulos:



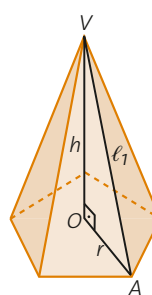
$\triangle OMA$

$$r^2 = a_1^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$



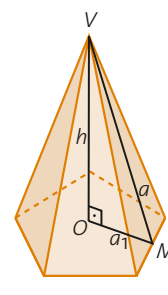
$\triangle VMA$

$$\ell_1^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$



$\triangle VOA$

$$\ell_1^2 = h^2 + r^2$$



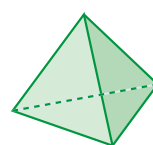
$\triangle VOM$

$$a^2 = h^2 + a_1^2$$

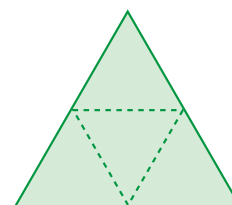
Caso particular importante: o tetraedro regular

Uma pirâmide particular formada por quatro triângulos congruentes e equiláteros é o **tetraedro regular** (*tetra*: quatro; *edro*: face).

Nele, qualquer uma das faces pode ser considerada base. O tetraedro regular é um caso particular de pirâmide regular.



Tetraedro regular



Planificado

Área da superfície da pirâmide

Do mesmo modo que foi visto nos prismas, nas pirâmides também temos:

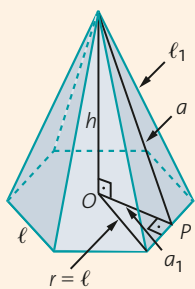
- **superfície lateral:** é formada pelas faces laterais (triângulos);
- **área lateral:** é a área da superfície lateral;
- **superfície total:** é formada pelas faces laterais e pela base;
- **área total:** é a área da superfície total.

Exercício resolvido

- 10.** Uma pirâmide regular hexagonal tem 8 cm de altura e a aresta da sua base mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total.

Resolução:

Sabemos que:



$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \quad (A_t = A_b + A_\ell) \\ a_1 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \\ A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \\ r = \ell \\ r^2 = \ell^2 = a_1^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\ a^2 = h^2 + a_1^2 \\ \ell = 4\sqrt{3} \\ h = 8 \end{array} \right.$$

- Cálculo de A_b (área da base):

$$A_b = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 16 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3};$$

$$A_b = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

- Cálculo de a_1 (apótema da base):

$$a_1 = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$$

ou

$$(4\sqrt{3})^2 = a_1^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1^2 = 48 - 12 = 36 \Rightarrow a_1 = 6; a_1 = 6 \text{ cm}$$

- Cálculo de a (apótema da pirâmide):

$$a^2 = 8^2 + (6)^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow a = 10; a = 10 \text{ cm}$$

- Cálculo de A_ℓ (área lateral):

$$A_\ell = 6 \cdot \frac{\ell a}{2} = 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 10 = 120\sqrt{3};$$

$$A_\ell = 120\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

- Cálculo de A_t (área total):

$$A_t = A_b + A_\ell = 72\sqrt{3} + 120\sqrt{3} =$$

$$= 192\sqrt{3}; A_t = 192\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Exercícios



Atividade em dupla

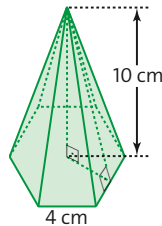


Atividade em equipe



- 45.** Uma pirâmide regular hexagonal tem 10 cm de altura e a aresta da sua base mede 4 cm. Calcule:

- o apótema da base; $2\sqrt{3} \text{ cm}$
- o apótema da pirâmide; $4\sqrt{7} \text{ cm}$
- a aresta lateral; $2\sqrt{29} \text{ cm}$
- a área da base; $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- a área lateral; $48\sqrt{7} \text{ cm}^2$
- a área total. $24(\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) \text{ cm}^2$



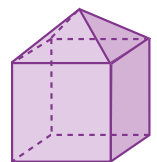
- 46.** Determine a área total de uma pirâmide regular cuja altura é 15 cm e cuja base é um quadrado de 16 cm de lado. 800 cm^2

- 47.** Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais e a área da base é igual a 16 cm^2 . Qual é a área total da pirâmide? $16(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

- 48.** Determine a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sabendo que a aresta da base mede 8 cm e a altura da pirâmide mede 12 cm. $208\sqrt{3} \text{ cm}^2$

- 49.** A soma das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular é 72 cm. Calcule a área total do tetraedro. $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$

- 50.** A base de uma pirâmide é uma das faces de um cubo de aresta 2 cm. Sendo a aresta lateral da pirâmide igual à diagonal do cubo e supondo que a pirâmide e o cubo estão em semiespaços opostos em relação ao plano da base da pirâmide (figura ao lado), calcule a área total do sólido formado pela união da pirâmide com o cubo. $4(5 + \sqrt{11}) \text{ cm}^2$

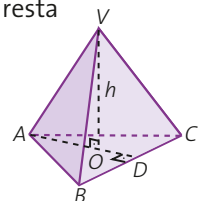


- 51.** Em um tetraedro regular, a aresta mede $2\sqrt{3} \text{ cm}$.

Calculem:

- a altura do tetraedro; $2\sqrt{2} \text{ cm}$
- a área total. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

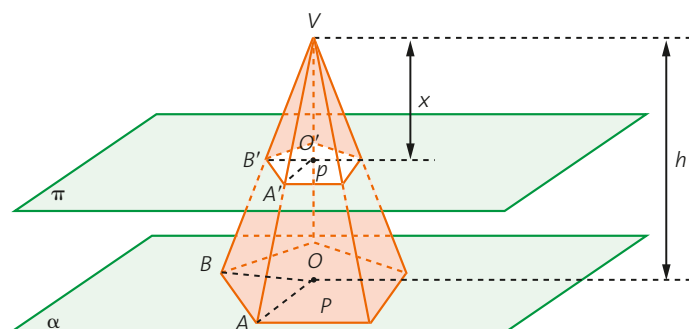
(Dica: o ponto O é o baricentro do triângulo ABC.)



Volume da pirâmide

Observe a figura abaixo:

Ilustrações técnicas desta página:
Banco de Imagens/Arquivo da editora



Fique atento!

Polígonos semelhantes têm ângulos congruentes e segmentos correspondentes proporcionais. Se $\frac{a}{b}$ é a razão constante entre seus segmentos correspondentes, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ é a razão entre suas áreas.

A pirâmide tem a base P contida no plano α e está sendo seccionada pelo plano horizontal π , paralelo a α .

A secção da pirâmide pelo plano π é um polígono p semelhante à base P . É interessante notar que a secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base destaca uma pirâmide menor, que é semelhante à original. A pirâmide miniatura tem base p e altura x (distância do ponto V ao plano π), e a pirâmide original tem base P e altura h .

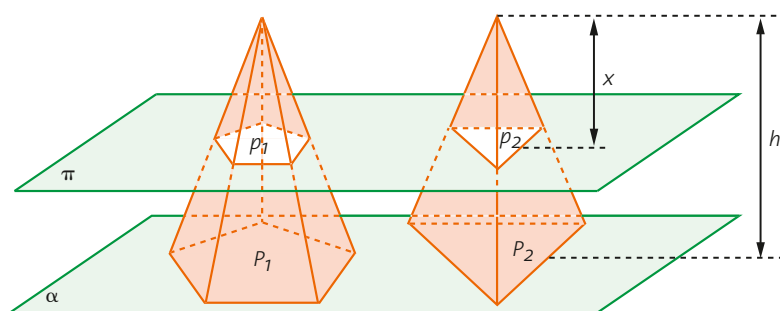
Como já estudamos na página 182, se duas figuras geométricas são semelhantes, com razão k entre suas dimensões lineares, então suas áreas têm razão k^2 . No caso, k é a razão entre as alturas h e x das pirâmides semelhantes.

$$k = \frac{h}{x} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Assim, se p e P são semelhantes, então:

$$\frac{\text{área de } P}{\text{área de } p} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Vamos agora considerar duas pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura. Vejamos o que acontece com as áreas das secções transversais situadas a uma mesma distância do vértice da pirâmide.



Já vimos que $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$.

Daí tiramos $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2}$.

Como consideramos inicialmente que área de $P_1 = \text{área de } P_2$, concluímos que:

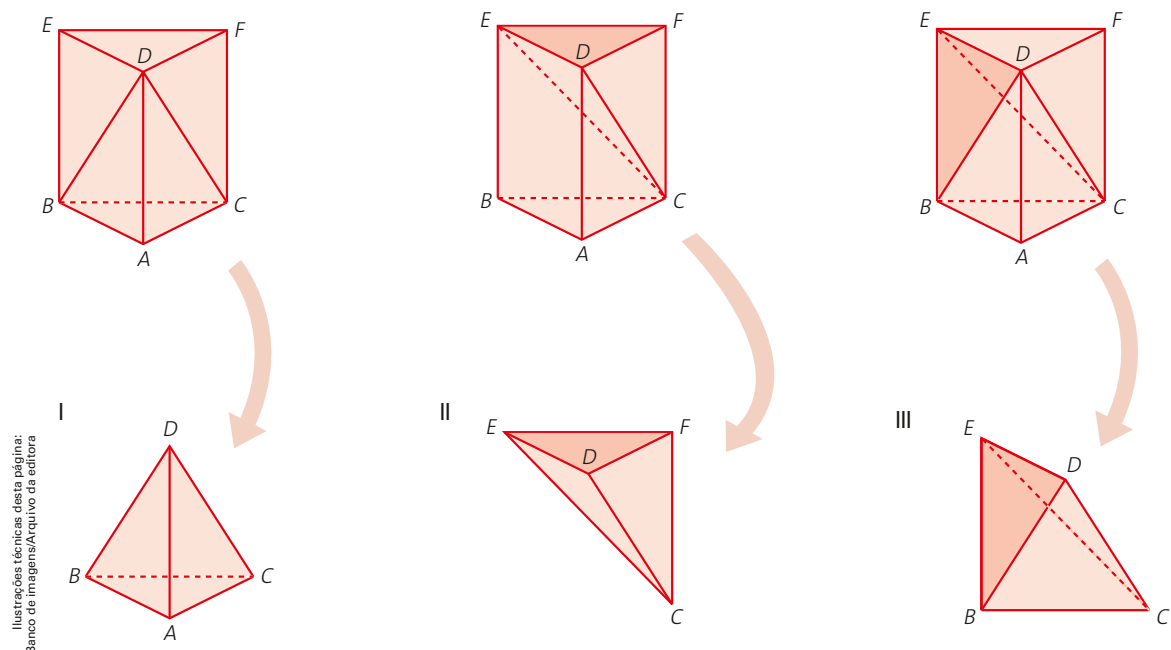
$$\text{área de } p_1 = \text{área de } p_2 \text{ para qualquer plano horizontal } \pi.$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, os volumes das pirâmides são iguais, ou seja:

Pirâmides com áreas das bases iguais e com mesma altura têm volumes iguais.

Cálculo do volume da pirâmide triangular

Vamos agora decompor um prisma triangular em três pirâmides, como indicam as figuras:



Observações:

- 1ª) As pirâmides I e II têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de D ao plano (ABC) é igual à distância de C ao plano (DEF) – altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.
- 2ª) As pirâmides II e III também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo CEF é congruente ao triângulo BCE , pois cada um deles é a metade do paralelogramo $BCFE$, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de D ao plano $(BCFE)$. Logo, II e III têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$ e, portanto, os três volumes são iguais.

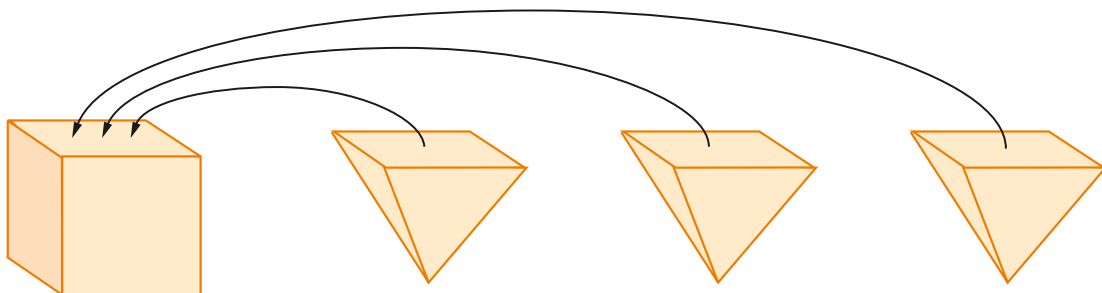
Lembrando que $V_{\text{prisma}} = V_I + V_{II} + V_{III}$ e fazendo $V_I = V_{II} = V_{III} = V$, temos:

$$V_{\text{prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

Como $V_{\text{prisma}} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$, temos:

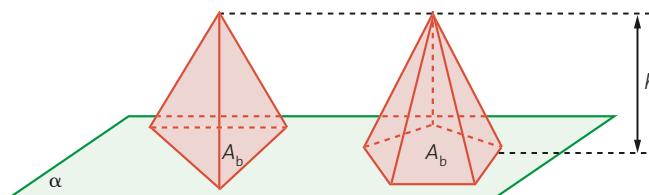
$$V \text{ ou } V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

- 3ª) A propriedade citada na 2ª observação pode ser verificada experimentalmente. Se quiséssemos encher de água uma vasilha em forma de prisma usando um recipiente em forma de pirâmide, com mesma base e mesma altura, seria necessário usá-lo três vezes para encher a vasilha.



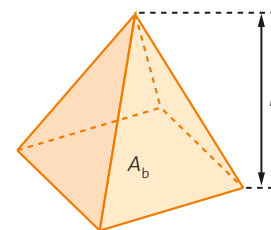
Cálculo do volume de uma pirâmide qualquer

Agora, para determinarmos o volume de uma **pirâmide qualquer**, usamos a conclusão anterior e o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, consideramos uma pirâmide triangular que tenha a mesma área da base e a mesma altura que uma pirâmide qualquer.



O princípio de Cavalieri garante que duas pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais. Então:

volume da pirâmide triangular = volume de uma pirâmide qualquer (de mesma área da base e mesma altura)



Como o volume da pirâmide triangular é obtido fazendo $\frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$, concluímos que:

$$\text{volume de uma pirâmide qualquer} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

ou seja:

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

Exercícios resolvidos

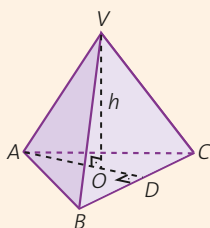
11. Qual é o volume de um tetraedro regular de aresta a ?

Resolução:

Sabemos que, em um tetraedro regular (figura abaixo), as quatro faces são triângulos equiláteros.

Vamos calcular a área da base: $A_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ (área de um triângulo equilátero de lado a).

Calculamos, agora, a altura do tetraedro:



• O é o centro do triângulo equilátero ABC

• $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$

• $\overline{AO} = \frac{2}{3} \overline{AD}$

• $\overline{AD}$ é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$:

$$\overline{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Das observações feitas, podemos concluir que:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Considerando o triângulo retângulo AOV ($\widehat{O}$ é reto), temos:

$$\overline{AV}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OV}^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vamos, agora, calcular o volume:

$$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{3a^3 \sqrt{2}}{36} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Então, o volume do tetraedro regular é $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

12. Calcule o volume de uma pirâmide quadrada cuja aresta da base mede 4 cm e a altura, 7 cm.

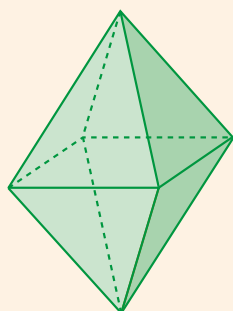
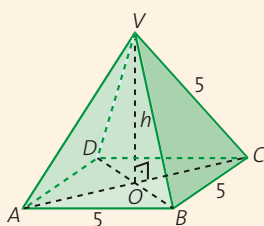
Resolução:

$$A_b = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$$

$$h = 7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{16 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm}}{3} = \frac{112 \text{ cm}^3}{3} \approx 37,3 \text{ cm}^3$$

13. Quando duas pirâmides regulares de bases quadradas e cujas faces laterais são triângulos equiláteros são colocadas base a base, o sólido resultante (figura abaixo à direita) é chamado octaedro regular. Calcule o volume do octaedro regular de aresta 5 cm.



Resolução:

Vamos calcular a altura de cada pirâmide:

- $\overline{AC}$ → diagonal do quadrado: $5\sqrt{2}$

- $\overline{VO}$ → altura da pirâmide (h)

- $\overline{OC}$ → metade da diagonal do quadrado: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

No triângulo retângulo VOC ($\widehat{O}$ é reto) temos:

$$5^2 = h^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 25 - \frac{50}{4} = \frac{50}{4} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Vamos calcular o volume:

$$A_b = 5 \cdot 5 = 25$$

$$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{25 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}}{3} \approx \frac{125 \cdot 1,4}{6} \approx 29,1$$

Como são duas pirâmides, temos:

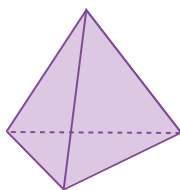
$$V \approx 2 \cdot 29,1 = 58,2$$

Portanto, o volume do octaedro regular é de aproximadamente $58,2 \text{ cm}^3$.

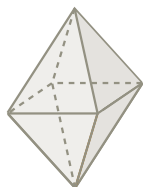
Exercícios

52. Calcule o volume de uma pirâmide quadrada cuja aresta da base mede 15 cm e a altura mede 9 cm. **675 cm³**

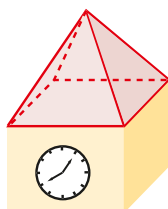
53. Uma peça maciça de cristal tem o formato de um tetraedro (figura ao lado). Sabendo que cada aresta da peça mede 10 cm, qual é o volume de cristal usado para fazer essa peça? **$\frac{250\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$**



54. Uma pedra preciosa tem a forma da figura ao lado. Sabendo que a pedra tem 6 mm em todas as arestas, calcule o volume da pedra. **Aproximadamente 100,8 mm³.**



55. A parte mais alta da torre de uma igreja é uma pirâmide quadrada (figura ao lado). A aresta da base tem 6 m e a altura da pirâmide é 4 m. Qual é o volume dessa parte da torre? **48 m³**



56. A Pirâmide de Quéops é conhecida como a Grande Pirâmide do Egito. Sua base tem aproximadamente 230 m de aresta e sua altura é de 137 m. Qual é o volume aproximado dessa pirâmide?

Aproximadamente 2 400 000 m³.



Pirâmide de Quéops. Fotografia de 2015.

57. A aresta da base de uma pirâmide quadrada mede 10 cm e a altura da pirâmide mede 12 cm. Determine o volume da pirâmide. **400 cm³**



Tronco de pirâmide

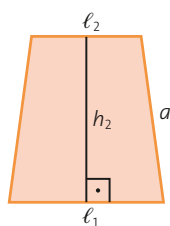
Vamos considerar uma pirâmide de vértice V e altura h . Traçando um plano π paralelo à base, que secciona a pirâmide a uma distância d do vértice, obtemos dois poliedros: uma pirâmide de vértice V e altura d e um poliedro que é chamado **tronco** da pirâmide inicial.

No tronco da pirâmide, destacamos:

- duas bases: a base da pirâmide inicial (base maior do tronco) e a secção determinada por π (base menor do tronco);
- as faces laterais, que são trapézios;
- a distância entre as bases do tronco, que se chama altura do tronco; sua medida é expressa por $h_1 = h - d$.

Quando a pirâmide original é regular, o tronco de pirâmide é chamado regular e, nesse caso:

- as bases são polígonos regulares e semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles;
- a altura de um desses trapézios é chamada **apótema** do tronco.

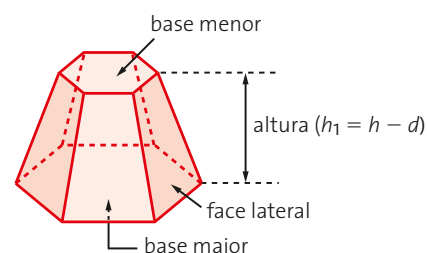
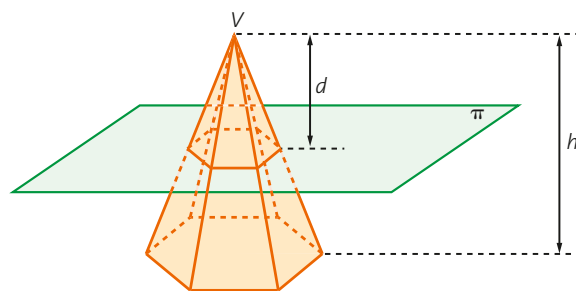


ℓ_1 = aresta da base maior do tronco

ℓ_2 = aresta da base menor do tronco

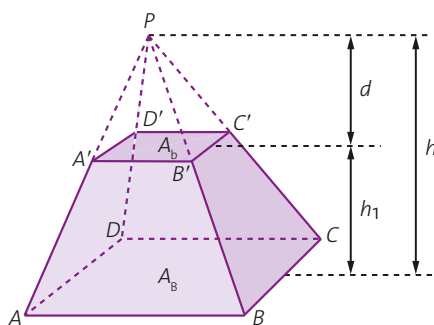
a = aresta lateral do tronco

h_2 = apótema do tronco (ou altura da face lateral)



Volume do tronco de pirâmide

Consideremos o tronco de pirâmide representado pela figura abaixo.



A_B = área da base maior

A_b = área da base menor

h = altura da pirâmide $PABCD$

d = altura da pirâmide $PA'B'C'D'$

h_1 = altura do tronco

V = volume do tronco

Demonstra-se que o volume do tronco da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{h_1}{3} (A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b)$$

Fique atento!

Na prática, em geral é mais adequado obter o volume do tronco pela diferença dos volumes das pirâmides semelhantes ($PABCD$ e $PA'B'C'D'$), em vez de aplicar a fórmula acima. Entretanto, fica a critério de cada um o processo a ser usado.

Exercícios resolvidos

14. A área da base de uma pirâmide é 36 cm^2 . Uma seção transversal feita a 3 cm da base tem 9 cm^2 de área. Calcule a altura da pirâmide.

Na figura, temos:

$$P_1 = 36 \text{ cm}^2$$

$$p_1 = 9 \text{ cm}^2$$

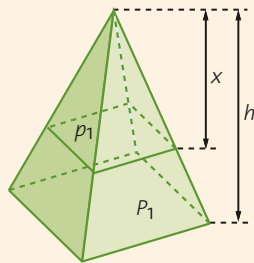
$$h - x = 3 \text{ cm} \Rightarrow x = h - 3$$

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{h^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36}{9} = \frac{h^2}{(h-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{h^2}{(h-3)^2} \Rightarrow 2 = \frac{h}{h-3} \Rightarrow 2h - 6 = h \Rightarrow h = 6$$

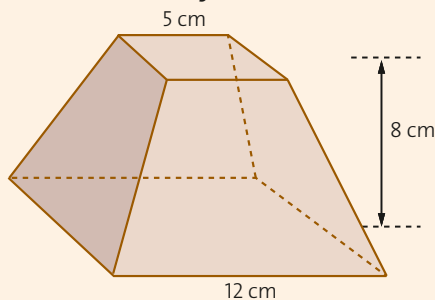
A altura da pirâmide é 6 cm.



15. Um tronco de pirâmide tem como bases dois quadrados de lados 5 cm e 12 cm. A altura do tronco é 8 cm. Calcule o volume desse tronco.

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula



$$A_B = 12 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$$

$$h_1 = 8 \text{ cm}$$

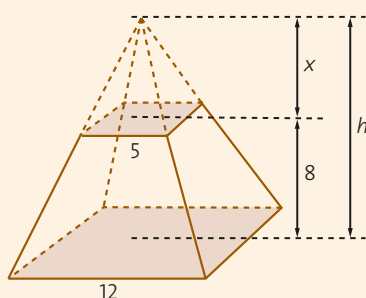
$$V = \frac{h_1}{3} (A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) = \frac{8}{3} (144 + 60 + 25) =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot 229 = \frac{1832}{3} \approx 610,6$$

O volume do tronco é de $610,6 \text{ cm}^3$, aproximadamente.

2ª maneira: sem usar a fórmula

A partir do tronco, consideremos as pirâmides original e miniatura, com suas alturas h e x .



Temos que $h = x + 8$ e que as duas pirâmides são semelhantes. Então:

$$k = \frac{5}{12} = \frac{x}{h} \Rightarrow 5h = 12x \Rightarrow 5(x + 8) = 12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{7} \text{ e } h = \frac{96}{7}$$

O volume da pirâmide original é

$$\frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \frac{96}{7} = \frac{4608}{7}$$

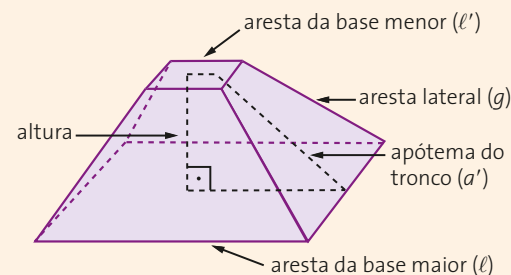
O volume da pirâmide miniatura é

$$\frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \frac{40}{7} = \frac{1000}{21}$$

Então, o volume do tronco é

$$\frac{4608}{7} - \frac{1000}{21} = \frac{1832}{3} \approx 610,6; 610,6 \text{ cm}^3.$$

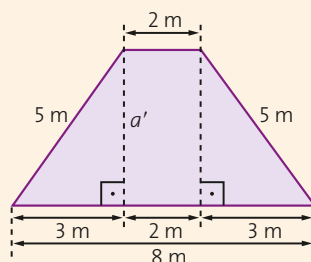
16. As bases de um tronco de pirâmide regular são quadrados de lados 8 m e 2 m, respectivamente. A aresta lateral do tronco mede 5 m. Calcule o volume do tronco.



Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

A face lateral desse tronco de pirâmide determina um trapézio isósceles, conforme mostra a figura abaixo.



Pela figura, temos:

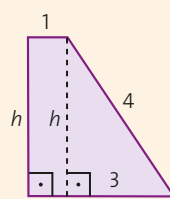
$$5^2 = (a')^2 + 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a')^2 = 16 \Rightarrow a' = 4 \text{ m}$$

Vamos calcular a altura do tronco:

Pela figura, temos:

$$4^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 7 \Rightarrow h = \sqrt{7} \text{ m}$$



Veja a resolução no Manual do professor.

Para refletir

Localize a figura da esquerda no desenho do tronco e justifique os valores 4, 1, 4 e 3.

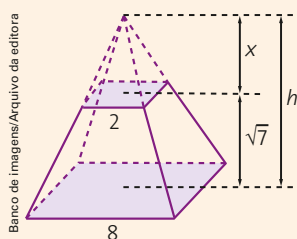
Vamos calcular o volume do tronco no qual temos $A_B = 64 \text{ m}^2$, $A_b = 4 \text{ m}^2$, $h = \sqrt{7} \text{ m}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{3} (A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) = \\ &= \frac{\sqrt{7}}{3} (64 + \sqrt{64 \cdot 4} + 4) = \frac{\sqrt{7}}{3} (64 + 16 + 4) = \\ &= \frac{84\sqrt{7}}{3} = 28\sqrt{7} \end{aligned}$$

Logo, o volume do tronco é $28\sqrt{7} \text{ m}^3$.

2ª maneira: sem usar a fórmula

Mesmo procedimento até obter $h = \sqrt{7}$; depois, a partir do tronco, consideremos as pirâmides original e miniatura, com suas alturas h e x .



Temos que $h = x + \sqrt{7}$ e que as duas pirâmides são semelhantes. Então:

$$k = \frac{2}{8} = \frac{x}{h} \Rightarrow 2h = 8x \Rightarrow h = 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{7} = 4x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Não calcularemos h .

O volume da pirâmide miniatura é:

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{9}$$

A razão entre os volumes da pirâmide miniatura e da original é $k^3 = \left(\frac{2}{8}\right)^3 = \frac{1}{64}$. Assim:

$$\frac{V_{\text{mini}}}{V_{\text{original}}} = \frac{1}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{original}} = V_{\text{mini}} \cdot 64 = \frac{256\sqrt{7}}{9}$$

Então, o volume do tronco é:

$$\frac{256\sqrt{7}}{9} - \frac{4\sqrt{7}}{9} = \frac{252\sqrt{7}}{9} = 28\sqrt{7}; 28\sqrt{7} \text{ m}^3$$

Exercícios

58. Uma pirâmide tem por base um quadrado de lado 8 cm. A altura da pirâmide é 20 cm. Calcule a área da seção transversal feita a 12 cm do vértice.

23,04 cm²

59. A área da base de uma pirâmide é 100 cm². A área da seção transversal feita a 5 cm da base da pirâmide é 25 cm². Calcule a altura da pirâmide.

10 cm

60. Uma seção transversal é feita a 4 cm do vértice de uma pirâmide. A área da seção transversal é igual a $\frac{4}{9}$ da área da base da pirâmide. Calcule a altura da pirâmide.

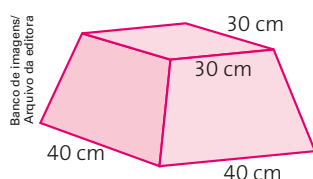
6 cm

61. Uma pirâmide é de base hexagonal. O lado do hexágono da base mede 6 cm. A altura da pirâmide é 30 cm. Uma seção transversal é feita a 10 cm do vértice da pirâmide. Qual é a área da seção transversal?

6√3 cm²

62. Uma peça de cristal tem a forma e as medidas da figura abaixo. Qual é o volume de cristal empregado para fazer essa peça se sua altura é de 15 cm?

18 500 cm³



63. Um tronco de pirâmide tem como bases dois quadrados de lados 8 cm e 12 cm, respectivamente. A altura do tronco é 10 cm. Calculem o volume do tronco.

$\frac{3\,040}{3} \text{ cm}^3$

64. História



Em São Paulo, no Parque do Ibirapuera, há um monumento de concreto chamado Obelisco aos Heróis de 1932, uma homenagem aos que morreram na Revolução Constitucionalista de 1932. Esse monumento tem a forma de um tronco de pirâmide (fotografia ao lado) e tem 72 m de altura. Suas bases são quadrados de arestas 9 m e 7 m. Qual é o volume de concreto usado na construção desse monumento?

4 632 cm³

Obelisco aos Heróis de 1932.
Fotografia de 2012.



Rubens Chaves/Pulsar Imagens



Platão e seus poliedros

Filósofo grego, Platão foi discípulo de Sócrates. Nasceu em Atenas em 427 a.C. e morreu em 347 a.C., com 80 anos de idade. Fundou uma escola em Atenas, no ano de 386 a.C., a “Academia”, onde transmitia seus ensinamentos aos seus discípulos. Via nos filósofos-governantes a solução para os problemas políticos. Suas obras são conhecidas como *Diálogos*, pois retratavam diálogos (reais e imaginários) entre Sócrates e outras pessoas, que focavam principalmente a política e a moral. Os *Diálogos* de Platão estão entre as maiores obras literárias do mundo, sendo considerados por muitos verdadeiras obras de arte.

O mais importante diálogo de Platão é a *República*, sendo também um dos mais longos. Nesse diálogo, Platão enfoca a Política, a Educação, a Arte, a Poesia e a Filosofia pura, ocupando-se principalmente da natureza da justiça. É uma visão geral de toda a filosofia de Platão e é nele que está a famosa “Alegoria da caverna”.

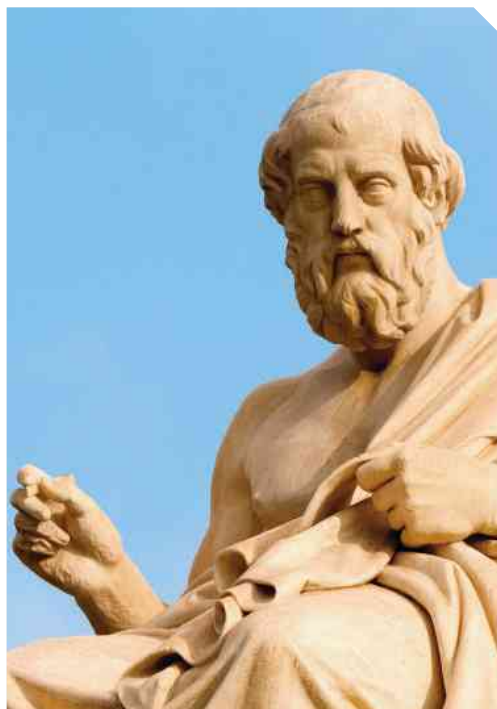
Platão defendia o *quadrvium*, os quatro campos da Matemática no estudo das artes liberais, que compreendia a Aritmética, a Geometria plana, a Geometria espacial e a Astronomia. Acreditava que a busca da compreensão das coisas levava à pureza do conhecimento. Na porta de sua academia, Platão escreveu “Que não entre aqui aquele que ignore a Geometria”.

No diálogo *Timeu* (350 a.C.), Platão apresentou um estudo do Universo, que para ele consistia em formas; em objetos particulares; em Deus, o artesão; em espaço absoluto e em matéria bruta. Platão acreditava que tudo era composto de terra, ar, fogo e água, e que a cada um desses elementos correspondia um poliedro regular – que já era conhecido dos gregos. Platão associou à terra o hexaedro (mais especificamente, o cubo) por causa da sua “estabilidade”; ao fogo, o tetraedro; ao ar, o octaedro; e à água, o icosaedro, por serem sólidos constituídos de triângulos, para ele a unidade básica de todas as coisas. O dodecaedro representava o elemento do qual o Universo seria feito.

Leia, a seguir, um trecho do *Timeu*:

Devemos prosseguir distribuindo as figuras cujas origens acabamos de descrever pelo fogo, terra, água e ar. Atribuímos o cubo à terra, uma vez que é o mais imóvel dos quatro corpos e o que tem a forma mais estável, sendo estas características que deve possuir a figura com as formas mais estáveis. [...]

Mantemos assim o nosso princípio de verossimilhança atribuindo o cubo à terra e, de forma semelhante, atribuímos à água a menos móvel das outras figuras, a mais móvel ao fogo e a intermédia ao ar. E de novo atribuímos a menor figura ao fogo, a maior à água, a intermédia ao ar; a mais cortante ao fogo, a segunda mais cortante ao ar e a menos cortante à água. Resumindo, a figura que tem o menor número de faces deverá ser, pela natureza das coisas, a mais móvel, assim como a mais cortante e a mais penetrante e, finalmente, sendo composta pelo menor número de partes semelhantes, a mais leve. A nossa segunda figura será a segunda em todas essas características, e a nossa terceira será a terceira. Deste modo, a lógica e a verossimilhança exigem que olhemos a pirâmide como a figura sólida que é a unidade básica ou a semente do fogo; e podemos olhar a segunda das figuras que construímos (o octaedro) como a unidade básica do ar, a terceira (icosaedro) a da água.



scott72/Stock/Getty Images

Estátua de Platão (427 a.C.-347 a.C.) na Academia de Atenas, Grécia. Fotografia de 2012.

Capítulo 5

Noções de Estatística Descritiva

5.1 Amostragem

Em todo tipo de estudo, é comum nos depararmos com enormes quantidades de dados gerados por observações, procedimentos experimentais ou produzidos em simulações e outros processos computacionais. Esses dados contêm as informações que pretendemos estudar e recebem o nome de **população**, mesmo quando não se referem a um grupo de indivíduos.

Algumas vezes é possível acessar a toda uma população, mas o mais comum é que isso seja inviável por razões práticas ou econômicas. Assim, frequentemente temos que nos limitar a analisar subconjuntos da população, denominados **amostras**.

A seleção de uma amostra que efetivamente permita tirar conclusões válidas para toda a população é um problema científico relevante, com esquemas variados de amostragem. O tipo de amostragem mais utilizado é a amostra *casual simples*, quando selecionamos ao acaso, com ou sem reposição.

Existem outros esquemas de amostragem, como:

1. *Sistemática*: Seleciona-se as unidades amostrais através de um esquema preestabelecido de sistematização, visando cobrir a população em toda a sua extensão, obtendo-se um modelo uniforme.
2. *Estratificada*: Consiste em dividir toda a população ou o objeto de estudo em diferentes subgrupos ou estratos diferentes, de maneira que um indivíduo pode fazer parte apenas de um único estrato ou camada.
3. *Por Conglomerado*: É uma amostragem probabilística em que os elementos da população são selecionados aleatoriamente. De forma natural por grupos

Contudo, esses outros tipos de amostragem, não serão assunto de estudo neste texto.

5.2 Tipos de Dados

Existem dados ou variáveis *qualitativos* ou *quantitativos*, diferenciados pela natureza dos valores que podem assumir.

Dados qualitativos assumem valores em um conjunto de categorias. Podem ser:

1. **Dados Qualitativos Ordinais**: quando as categorias podem ser ordenados. Por exemplo, em uma população podemos considerar o nível de instrução (fundamental, médio, superior incompleto, superior completo, pos-graduação) ou o grau de satisfação com o transporte público (muito insatisfeito, pouco insatisfeito, neutro, satisfeito, muito satisfeito). Em cada caso existe um ordenamento natural dessas categorias.

2. **Dados Qualitativos Nominais:** quando as categorias não são ordenáveis. Por exemplo, em uma população podemos considerar o sexo (masculino ou feminino), a cor do cabelo (castanho, negro, loiro ou ruivo) o time de futebol para o qual se torce, etc, sem que haja qualquer ordenamento natural para os resultados possíveis.

Dados quantitativos assumem valores numéricos. Podem ser:

3. **Dados Quantitativos Discretos:** quando são números obtidos um conjunto espaçado de valores, muitas vezes naturais ou inteiros, frequentemente resultados de contagens. Por exemplo, em uma população de pessoas podemos considerar o número de filhos ou o número de aparelhos de TV que têm em casa.

4. **Dados Quantitativos Contínuos:** quando estão em uma escala contínua, normalmente caindo em um intervalo de números reais. Por exemplo, em uma população de pessoas podemos considerar a altura ou o peso de cada um. Pode haver um certo grau de conversibilidade entre os tipos de dados. Por exemplo, com frequência podemos converter dados quantitativos contínuos em discretos por algum processo de arredondamento. E em alguns casos dados numéricos que seriam naturalmente discretos podem ser mais facilmente tratados como contínuos. Esse é o caso da renda mensal de uma pessoa, que em princípio tem uma estrutura discreta, com saltos de centavo em centavo, mas que em geral é tratada como um dado contínuo. Especialmente porque o salto é muito pequeno se comparado com os valores típicos da variável. Também pode acontecer de transformarmos certos dados quantitativos em dados qualitativos ordinais. Por exemplo, conforme a idade da pessoa, podemos encaixá-la nas categorias de recém-nascido, criança,

jovem, adulto ou idoso, ao invés de lidar com as idades propriamente ditas.

5.3 Tratamento de dados Qualitativos

Vamos imaginar que para uma certa variável qualitativa existam k categorias, numeradas de 1 até k . Será relevante conhecer e tabelar a frequência absoluta (também chamada de incidência ou ocorrência) de cada categoria. Para a categoria i , a frequência absoluta na amostra em estudo será denotada como n_i . Com a soma de todas as ocorrências, obtemos o tamanho total N da amostra:

$$N = \sum_{i=1}^k n_i$$

A frequência relativa (ou proporção) da i -ésima categoria será um número entre 0 e 1 dado por:

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Obtemos a percentagem de ocorrências multiplicando a frequência relativa por 100 e acrescentando o símbolo %, lido como “por cento”. Por exemplo, as frequências relativas de 0,435 e 0,0126 são identificadas com as percentagens de 43,5% e 1,26%, respectivamente. Considere o Exemplo 5.1 a seguir. A tabela mostrada recebe o nome de *tabela de frequência*.

Exemplo 5.1. Os alunos do IFSUDESTEMG MANHUAÇU responderam uma pesquisa sobre o time de futebol que eles preferem, segue a tabela de frequência:

Time de futebol	n_i	f_i	$f_i(\%)$
Flamengo	11	0,103	10,3%
Botafogo	2	0,019	1,9%
Sao Paulo	19	0,178	17,8%
Cruzeiro	18	0,168	16,8%
Palmeiras	22	0,206	20,6%
Internacional	35	0,327	32,7%
total	107	1	100%

Do total de 107 participantes temos que 11 pessoas torcem pelo Flamengo, logo $11/107 = 0,103 = f_i$, frequência relativa e multiplicando por 100 temos 10,3%. Portanto, basta conhecermos o n_i e o total para podermos preencher a tabela com as frequências relativas.

Exemplo 5.2.

	n_i	f_i	f_{ac}
Muito ruim	11	0,0924	0,0924
Insatisfatório	43	0,3613	0,4537
Neutro	37	0,3109	0,7646
Satisfatório	22	0,1848	0,9494
Muito Satisfatório	6	0,0504	0,9998 $\equiv$ 1
total	119	1	100%

Aqui acrescentamos uma nova coluna para as frequências acumuladas f_{ac} . A frequência acumulada até determinada categoria é a soma das frequências de todas as categorias menores ou iguais à categoria considerada. Desse conceito obtemos informações que podem ser úteis. No Exemplo 5.2 sabemos que 45,37% das pessoas pesquisadas estão insatisfeitas com o transporte público, pois o consideram “muito ruim” (9,24%) ou “insatisfatório” (36,13%).

Observe que no exemplo anterior a frequência acumulada foi arredondada para 1, mas o número obtido é diferente de 1. Contudo, esta variação se deve aos arredondamentos anteriores dos cálculos das frequências relativas. No exemplo anterior não escrevemos as frequências relativas em porcentagem, pois, essencialmente não fornecem informação diferente. Por isso é recomendado escrever apenas uma das colunas, frequências relativas ou frequências relativas em porcentagem.

Exercícios 5.3. *Elabore uma tabela contendo as frequências relativas, frequências relativas em porcentagem e frequências acumuladas para os seguintes dados:*

1. *Em uma pesquisa sobre a escolaridade os resultados foram: 20 pessoas têm ensino fundamental, 13 responderam que têm ensino médio, 10 responderam que têm superior incompleto e 9 pessoas têm superior completo.*
2. *Em uma pesquisa sobre o atendimento num restaurante foram obtidos os seguintes resultados: 2 pessoas muito ruim, 3 insatisfatório, 8 médio, 12 satisfatório, 11 muito satisfatório.*

5.4 Representação Gráfica e Medidas de Tendência Central

Esta seção é baseada integralmente no livro do Dante, [2].

2 Representação gráfica

A representação gráfica fornece uma visão de conjunto mais rápida que a observação direta dos dados numéricos. Por isso, os meios de comunicação com frequência oferecem a informação estatística por meio de gráficos.

Consideremos uma situação em que, na votação para representante e vice-representante do 1º ano do Ensino Médio, um aluno anota os votos com um “x” ao lado do nome do candidato, enquanto seus colegas votam. Ao terminar a votação, podemos observar o resultado abaixo.

Adriano	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Letícia	x	x	x	x	x	x	x						
Luciana	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			
Marino	x	x	x	x	x	x							
Magda	x	x	x	x									

Fonte: Dados fictícios.

Não precisamos contar os votos para saber quem foi eleito. Pelos “xis”, notamos que Adriano foi o escolhido para representante e Luciana para vice.

Com uma simples olhada, obtemos a informação de que precisamos. Essa é uma característica importante dos gráficos estatísticos.

Gráfico de segmentos

A tabela a seguir mostra a venda de livros em uma livraria no segundo semestre de determinado ano.

Evolução da venda de livros (julho-dezembro)

Meses do segundo semestre	julho	agosto	setembro	outubro	novembro	dezembro
Número de livros vendidos	350	300	400	400	450	500

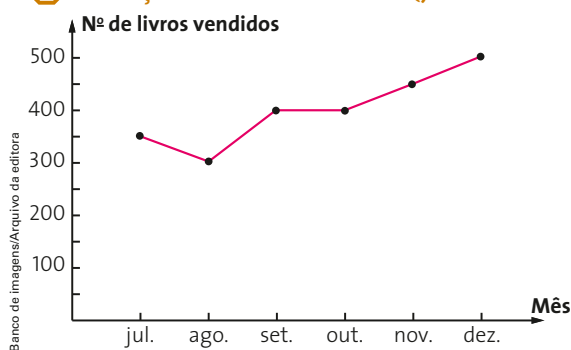
Fonte: Dados fictícios.

Essa situação estabelece uma correspondência que pode ser expressa por pares ordenados (julho, 350), (agosto, 300), etc. Usando eixos cartesianos, localizamos os seis pares ordenados e construímos um gráfico de segmentos.

Os gráficos de segmentos são utilizados principalmente para mostrar a evolução das frequências dos valores de uma variável durante certo período.

A posição de cada segmento indica crescimento, decréscimo ou estabilidade. Já a inclinação do segmento sinaliza a intensidade do crescimento ou do decréscimo.

Evolução da venda de livros (julho-dezembro)



Fonte: Dados fictícios.

Explique aos alunos que as escalas escolhidas para os eixos coordenados variam de acordo com a necessidade de representação.

Fique atento!

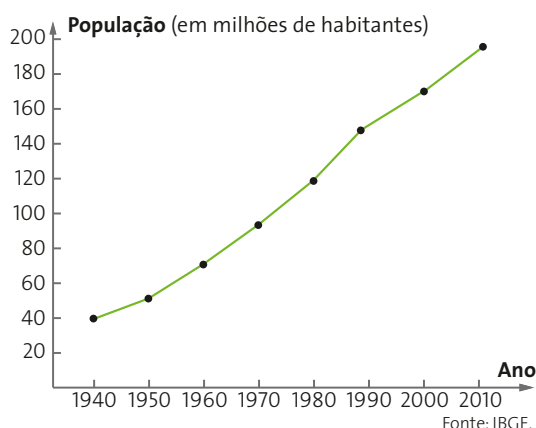
O gráfico de segmentos é chamado também de gráfico de linhas.

Pelo gráfico acima, podemos observar que:

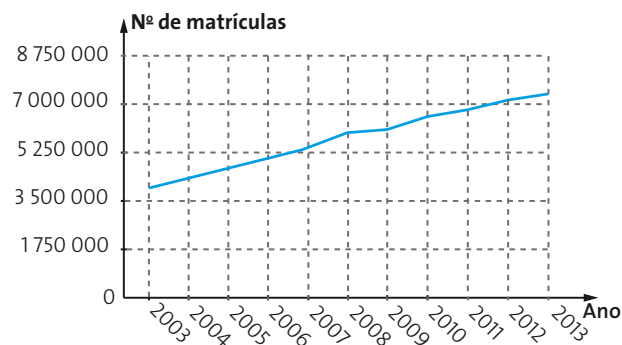
- de julho para agosto as vendas caíram;
- de setembro para outubro as vendas permaneceram estáveis;
- o crescimento de agosto para setembro foi maior do que o de outubro para novembro;
- o mês com maior número de vendas, desse período, foi dezembro;
- no mês de outubro foram vendidos 400 livros.

Veja outros exemplos de gráficos de segmentos.

Crescimento da população brasileira (1940-2010)



Número de alunos matriculados no Ensino Superior no Brasil



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: <<http://painel.mec.gov.br/painel.php?modulo=principal/detalhamentoIndicador&acao=A&detalhes=pais&indid=439>>. Acesso em: 11 fev. 2016.

Você sabia?

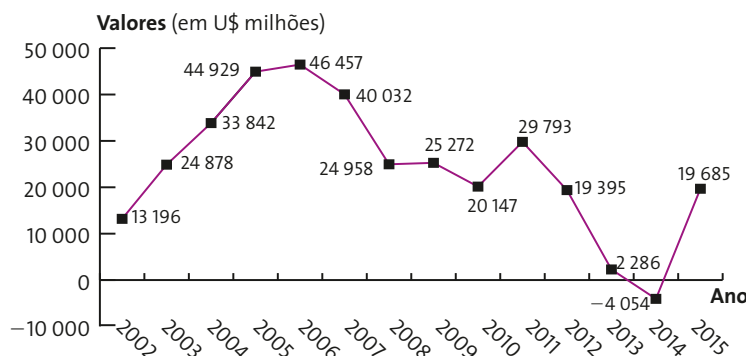
Os dados do gráfico acima, à esquerda, foram obtidos do Censo Demográfico 2010, que é uma pesquisa realizada a cada 10 anos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O primeiro Censo brasileiro aconteceu em 1872 e chamava-se Recenseamento da População do Império do Brasil. Os pesquisadores do IBGE visitam todos os domicílios do país para aplicar um questionário e posteriormente os dados são analisados e publicados em estudos sobre diversos temas.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 11 e 12 no Manual do Professor.

- Utilize o gráfico de segmentos do exemplo dado (venda de livros) na página anterior e responda:
 - Em que períodos do segundo semestre as vendas subiram? **De agosto a setembro e de outubro a dezembro.**
 - Em qual destes dois meses as vendas foram maiores: julho ou outubro? **Outubro.**
 - Em que mês do semestre as vendas foram menores? **Agosto.**
 - Em que mês foram vendidos 450 livros? **Novembro.**
- Um aluno apresentou durante o ano letivo o seguinte aproveitamento: primeiro bimestre: nota 7,0; segundo bimestre: nota 6,0; terceiro bimestre: nota 8,0; e quarto bimestre: nota 8,0. Construa no caderno um gráfico de segmentos correspondente a essa situação e, a partir dele, tire algumas conclusões.
- Uma professora anotou o número de faltas dos alunos, durante um semestre, de acordo com os dias da semana. Observe as anotações, construa o gráfico de segmentos no caderno e tire conclusões: segunda-feira, 64 faltas; terça-feira, 32; quarta-feira, 32; quinta-feira, 48; sexta-feira, 60.
- Analise o gráfico a seguir e responda:
 - Em qual ano o saldo comercial foi o menor? **2014**
 - Em qual ano o saldo foi o maior? **2006**
 - O que ocorreu com o saldo comercial de 2006 a 2008? **Decresceu.**
 - Quantos milhões de dólares cresceu o saldo de 2014 para 2015? **23 739 milhões de dólares.**

Evolução do saldo comercial do Brasil (2002-2015)



Fonte dos dados: Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior. Disponível em: <www.mdic.gov.br/arquivos/dwnl_1454413504.xls>. Acesso em: 4 fev. 2016.

Você sabia?

O saldo comercial, ou seja, o saldo da balança comercial, é um termo econômico que representa a diferença entre o que é exportado e o que é importado. Quando o saldo é positivo é porque o país exportou mais do que importou. Caso ocorra o inverso, dizemos que o saldo é negativo.

Gráfico de barras

A partir das notas dos alunos em Química, um professor elaborou a seguinte tabela de desempenho:

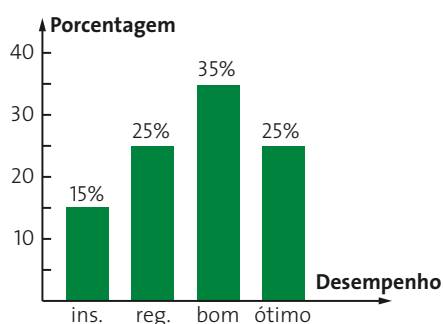
Frequências do desempenho em Química dos alunos de uma classe

Desempenho	insuficiente	regular	bom	ótimo	total
FA	6	10	14	10	40
FR	15%	25%	35%	25%	100%

Fonte: Dados fictícios.

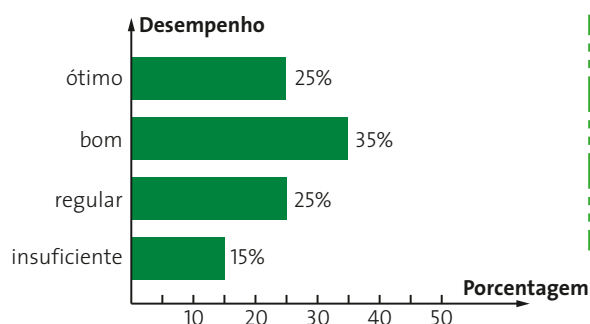
Com os dados da tabela é possível construir o gráfico de barras.

Desempenho em Química dos alunos de uma classe



Fonte: Dados fictícios.

Desempenho em Química dos alunos de uma classe



Fonte: Dados fictícios.

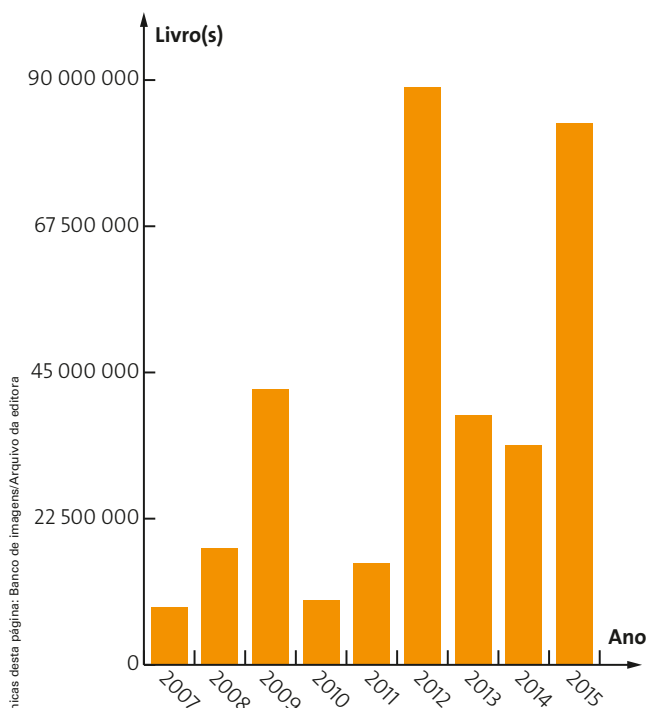
Para refletir

O gráfico de barras poderia ter relacionado desempenho com frequência absoluta. Faça isso.

Veja a resolução no Manual do Professor.

Veja alguns exemplos de gráficos de barras:

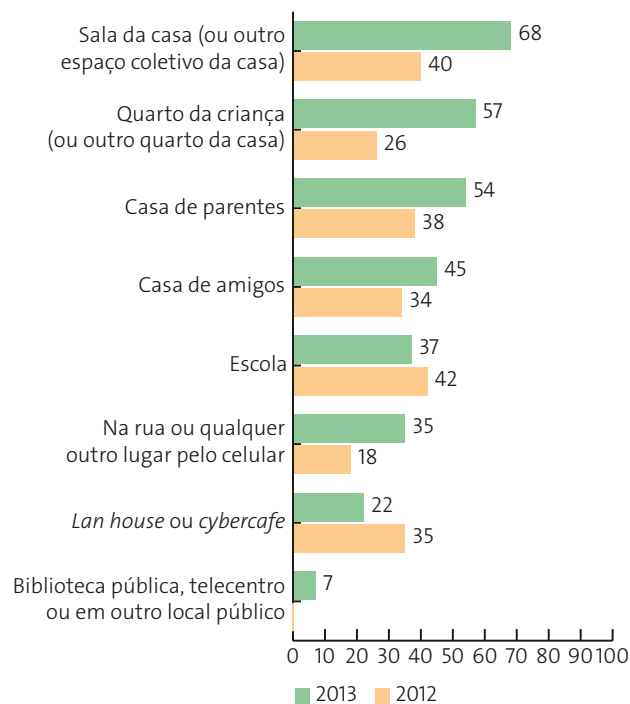
Livros distribuídos no Brasil pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio



Fonte: Painel de controle do MEC. Disponível em: <<http://painel.mec.gov.br/painel/detalhamentoIndicador/detalhes/pais/acaaid/79>>. Acesso em: 10 maio 2016.

Proporção de crianças/adolescentes, por local de acesso à internet

(Percentual sobre o total de usuários de internet de 9 a 17 anos)



Fonte: TIC Kids Online Brasil 2013: pesquisa sobre o uso da Internet por crianças e adolescentes no Brasil. p. 116. Disponível em: <<http://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic-kids-online-2013.pdf>>. Acesso em: 17 maio 2016.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 14, 15 e 16 no Manual do Professor.

14. A partir da variável “número de irmãos” do quadro da página 37, construa no caderno um gráfico de barras.
15. Durante uma hora foram anotados os tipos de veículos que passaram pela rua onde está situada uma escola e foram obtidos os seguintes dados: T, T, T, M, A, T, T, M, T, B, B, T, T, A, T, T, C, T, M, T, T, T, C, B, T, T, T, T, A, T, T, M, C, T, T, T, T, B, T, T, M, B, A (M: motocicleta; C: caminhão; B: bicicleta; A: ambulância; T: carro). Construa no caderno um gráfico de barras que corresponda a essa pesquisa.
16. As áreas das superfícies dos estados da região Sudeste do Brasil são, em valores aproximados: São Paulo: 250 000 km²; Espírito Santo: 46 000 km²; Rio de Janeiro: 44 000 km²; Minas Gerais: 590 000 km². Construa no caderno um gráfico de barras registrando essa distribuição.
17. Em uma eleição para representante de classe, os candidatos foram Ricardo, Paula e Fausto. Observe o resultado da votação no gráfico de barras, em que estão especificados os votos das mulheres e dos homens, e, em seguida, responda:

- a) Quantos alunos votaram? 40
Desses, quantas mulheres e quantos homens? 21 mulheres e 19 homens.
- b) Quantos votos obteve a candidata Paula? 12
- c) Quantas mulheres votaram em Ricardo? 3
- d) Qual é a porcentagem de votos recebidos por Fausto? 50%

Votos por sexo na eleição para representante de classe

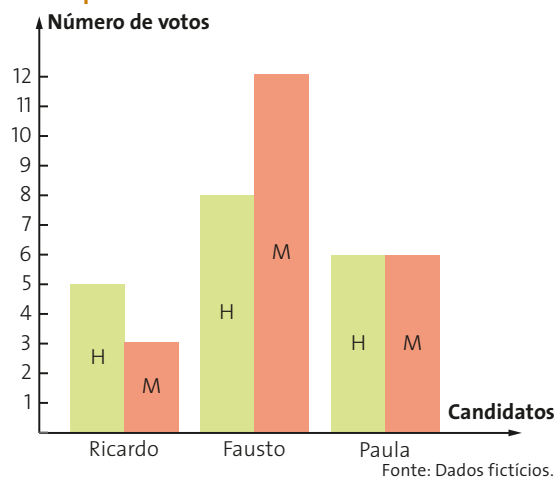


Gráfico de setores

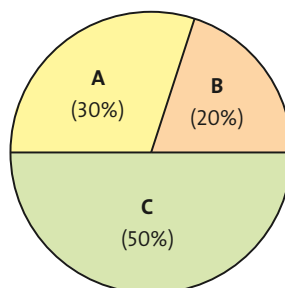
Em um *shopping center* há três salas de cinema, e o número de espectadores em cada uma delas em determinado dia da semana foi de 300 na sala A, 200 na B e 500 na C.

Veja essa situação representada em uma tabela de frequências e depois em gráficos de setores:

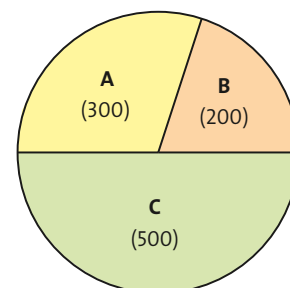
Frequências do número de espectadores nas salas de cinema

Sala	FA	FR	
A	300	$\frac{300}{1\,000} = \frac{3}{10}$	30%
B	200	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	20%
C	500	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	50%

Porcentagem de espectadores nas salas de cinema



Número de espectadores nas salas de cinema



Fonte da tabela de frequências e dos gráficos: Dados fictícios.

Em cada gráfico de setores, o círculo todo indica o total (1000 espectadores ou 100%) e cada setor indica a ocupação de uma sala. Na construção do gráfico de setores, determina-se o ângulo correspondente a cada setor proporcionalmente à frequência. Veja como exemplo o da sala A:

Usando a frequência absoluta, vem:

$$\frac{300}{1\,000} = \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 1\,000x = 108\,000^\circ \Rightarrow x = 108^\circ$$

Usando a frequência relativa (em %), temos:

$$x \text{ é } 30\% \text{ de } 360^\circ \Rightarrow x = 0,30 \cdot 360^\circ = 108^\circ$$

Para refletir

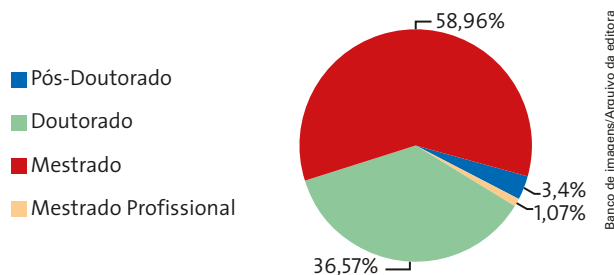
Verifique quais são os ângulos dos setores das salas B e C. Use um transferidor e constate na figura os ângulos de A, B e C.

Sala A: 108°; sala B: 72°; sala C: 180°.

Veja outros exemplos de gráficos de setores:

a) Foram concedidas 86 756 bolsas de pós-graduação em 2013.

Bolsas de pós-graduação concedidas no país em 2013

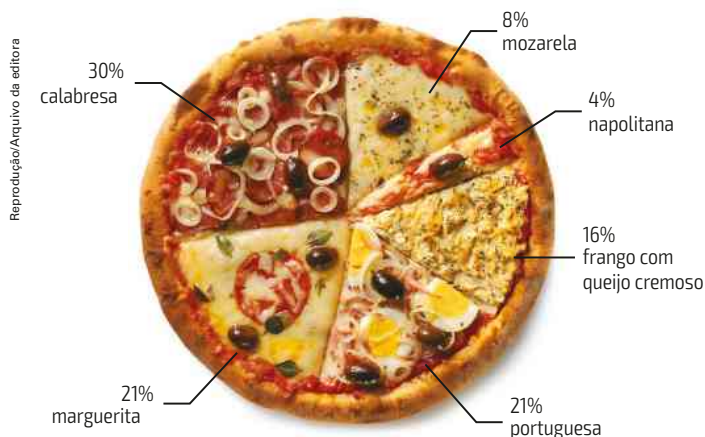


Fonte: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Disponível em: <<http://painel.mec.gov.br/painel.php?modulo=principal/detalhamentoIndicador&acao=A&detalhes=pais&in-did=114>>. Acesso em: 10 maio 2016.

b) *Pizza ideal*

Há 50 mil pizzarias no Brasil, entre estabelecimentos formais e informais. Metade delas fica em São Paulo, seguida por Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul, Minas Gerais e Bahia. Cada cidade tem suas preferências, e uma revista montou a redonda ideal, definida a partir dos sabores mais pedidos nos restaurantes de todo o Brasil, neste gráfico de *pizza* (setores) de pizzas.

Distribuição dos sabores de pizza mais pedidos no Brasil



Fonte: Revista *Superinteressante*, São Paulo, n. 300, jan. 2012. Disponível em: <<http://super.abril.com.br/alimentacao/grafico-pizza-676265.shtml>>. Acesso em: 10 maio 2016.

Fique atento!

Este gráfico também pode ser chamado de **pictórico**.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 18 e 19 no Manual do Professor.

18. Em uma eleição concorreram os candidatos A, B e C e, apurada a primeira urna, os votos foram os seguintes: A: 50 votos; B: 80 votos; C: 60 votos; brancos e nulos (BN): 10 votos.

A partir desses dados construa no caderno:

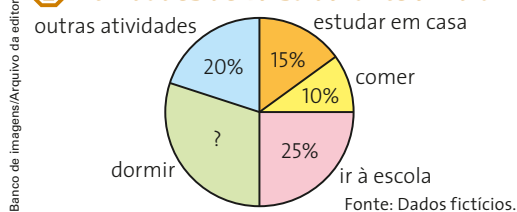
- a tabela de frequências dessa variável;
- o gráfico de barras, relacionando os valores da variável com as respectivas frequências absolutas;
- o gráfico de setores, relacionando os valores da variável com suas porcentagens.

Fique atento!

Neste exercício a variável é quantitativa discreta.

19. Para mostrar quanto tempo gasta com suas atividades, Luísa construiu um gráfico de setores.

Atividades de Luísa durante um dia



- Quantas horas por dia Luísa estuda em casa? **3,6 h**
- Que porcentagem do dia ela usa para dormir? **30%**
- Construa no caderno o gráfico de barras correspondente.

Histograma

Quando uma variável tem seus valores indicados por classes (intervalos), é comum o uso de um tipo de gráfico conhecido por **histograma**.

Por exemplo, consideremos a altura (em centímetros) de um grupo de alunos, agrupada em intervalos, e a seguir os histogramas correspondentes às frequências absolutas e relativas:

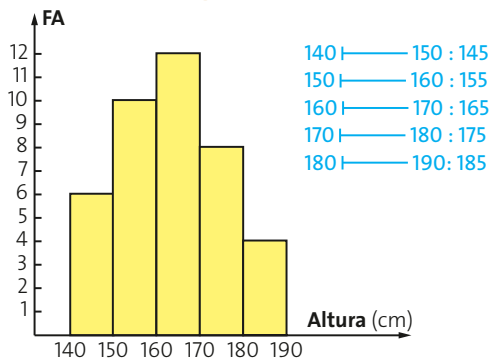
Frequências de intervalos de altura de um grupo de alunos

Altura (cm)	140 —— 150	150 —— 160	160 —— 170	170 —— 180	180 —— 190
FA	6	10	12	8	4
FR	15%	25%	30%	20%	10%

Fonte: Dados fictícios.

- histograma com as classes (intervalos) relacionadas às frequências absolutas:

Número de alunos por intervalo de altura



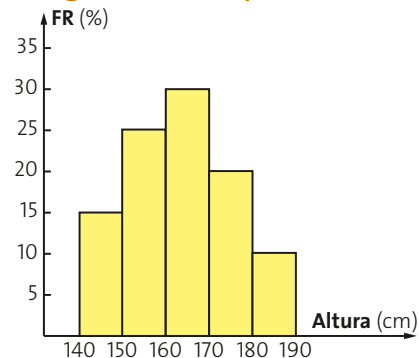
Fonte: Dados fictícios.

Para refletir

Qual é o número correspondente ao valor médio em cada uma das classes?

- histograma com as classes relacionadas às frequências relativas (em porcentagem):

Porcentagem de alunos por intervalo de altura

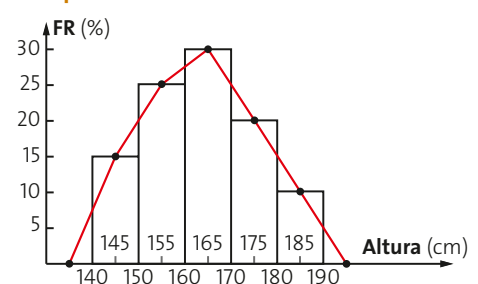


Fonte: Dados fictícios.

Às vezes usamos como representante de cada classe o valor médio correspondente (por exemplo, 155 representa a classe 150 |—— 160).

Os segmentos que ligam em sequência os pontos médios das bases superiores formam um gráfico de segmentos conhecido como **polígono do histograma**, que será usado em assuntos posteriores.

Porcentagem média de alunos por intervalo de altura



Fonte: Dados fictícios.

Exercício

[Veja a resolução no Manual do Professor.](#)

20.  Fazendo o levantamento dos salários dos vinte funcionários de um escritório, foram obtidos os seguintes valores em reais: 650, 800, 720, 620, 700, 750, 780, 680, 720, 600, 846, 770, 630, 740, 680, 640, 710, 750, 680 e 690. A partir deles, construam no caderno:

- a tabela de frequências com 5 classes;
- o histograma correspondente relacionando faixa salarial e frequência absoluta.

Construção de gráficos

Veja alguns exemplos de construção de gráficos:

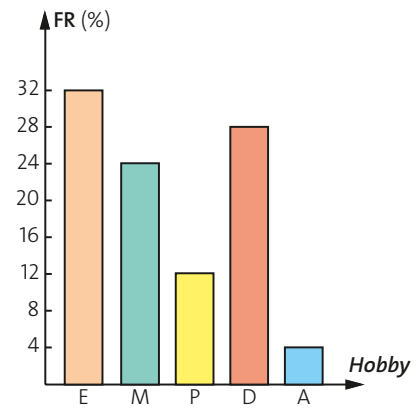
- 1º) Vamos construir a tabela de frequências e os gráficos de barras e de setores para a variável *hobby* do quadro da página 36.

Frequências do *hobby* de um grupo de alunos

Hobby	Contagem	FA	FR	
Esporte (E)		8	$\frac{8}{25} = 0,32$	32%
Música (M)		6	$\frac{6}{25} = 0,24$	24%
Patinação (P)		3	$\frac{3}{25} = 0,12$	12%
Dança (D)		7	$\frac{7}{25} = 0,28$	28%
Aeromodelismo (A)		1	$\frac{1}{25} = 0,04$	4%
Total		25	1	100%

Fonte: Dados fictícios.

Porcentagem de alunos por *hobby*



Fonte: Dados fictícios.

Nesse caso, todas as porcentagens são múltiplas de 4, então podemos usar 4% na escala. Veja:

$$\frac{4}{100} = \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 100x = 1440^\circ \Rightarrow x = 14,4^\circ$$

A cada 4% corresponde um setor de $14,4^\circ$.

E: $32\% (8 \cdot 4\%) \rightarrow 8 \cdot 14,4^\circ = 115,2^\circ$

M: $24\% (6 \cdot 4\%) \rightarrow 6 \cdot 14,4^\circ = 86,4^\circ$

P: $12\% (3 \cdot 4\%) \rightarrow 3 \cdot 14,4^\circ = 43,2^\circ$

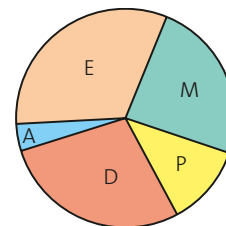
D: $28\% (7 \cdot 4\%) \rightarrow 7 \cdot 14,4^\circ = 100,8^\circ$

A: $4\% \rightarrow 14,4^\circ$

Então:

$$115,2 + 86,4 + 43,2 + 100,8 + 14,4 = 360,0^\circ$$

Porcentagem de alunos por *hobby*



Fonte: Dados fictícios.

- 2º) Na realização de uma prova foi anotado o tempo que cada aluno gastou para concluí-la (em minutos): 56; 51; 57; 49; 51; 51; 46; 50; 50; 47; 44; 57; 53; 50; 43; 55; 48; 56; 49; 51; 47; 46; 54; 52; 55; 45; 49; 50; 48; 51.

a) A partir desses dados vamos construir a tabela de frequências com os valores em 5 classes.

Subtraindo o menor valor do maior valor, a amplitude total será: $57 - 43 = 14$.

Sabendo que são 5 classes e escolhendo o número 15, a amplitude de cada classe será: $15 : 5 = 3$.

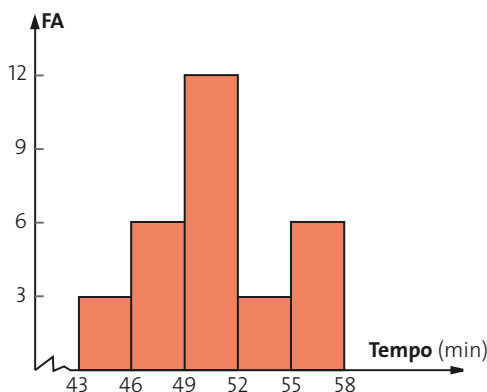
Frequências de intervalos de tempo para concluir uma prova

Tempo (min)	Contagem	FA	FR
43 — 46		3	10%
46 — 49		6	20%
49 — 52		12	40%
52 — 55		3	10%
55 — 58		6	20%
Total		30	100%

Fonte: Dados fictícios.

b) Vamos construir o histograma relacionando as classes e suas frequências absolutas.

Número de alunos por intervalo de tempo para concluir uma prova

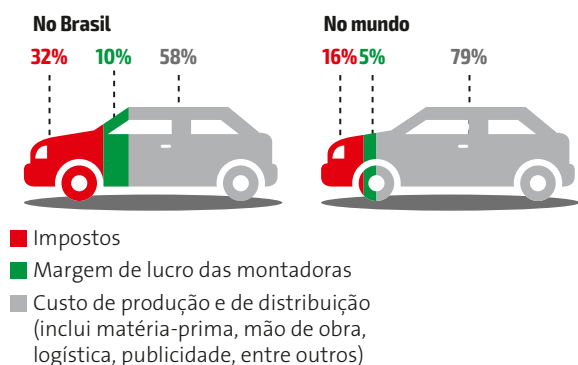


Fonte: Dados fictícios.

Vimos os vários tipos de gráficos utilizados para representar e interpretar dados estatísticos. É importante que se escolha sempre qual deles é o mais adequado à situação analisada.

É comum, em publicações como revistas, jornais e sites, ilustrar os vários tipos de gráfico com figuras relacionadas ao assunto, tornando-os mais atraentes. Esses são os **gráficos pictóricos** (ou **pictogramas**). Veja alguns:

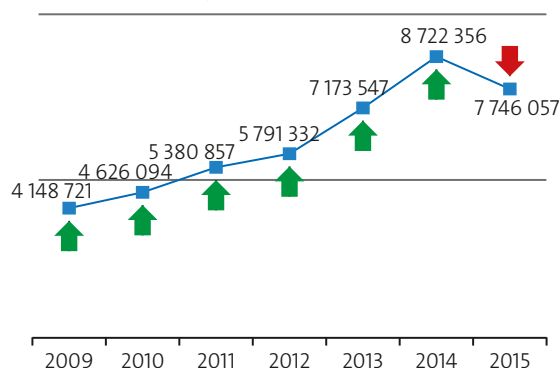
a) **Como se divide o preço de um veículo**



Fonte: *O Globo*. Disponível em: <<http://oglobo.globo.com/economia/automovel-no-brasil-custa-ate-106-mais-que-la-fora-5928923>>. Acesso em: 10 maio 2016.

b) **Evolução do número de inscritos no Enem de 2009 a 2015**

O número de candidatos inscritos no Enem de 2014 dobrou em relação ao Enem de 2009.



Fonte dos dados: *G1*. Disponível em: <<http://g1.globo.com/educacao/enem/2015/noticia/2015/07/enem-2015-tera-77-milhoes-de-candidatos-11-menos-que-em-2014.html>>. Acesso em: 10 maio 2016.

Exercícios

Veja a resolução dos exercícios 21 e 22 no Manual do Professor.

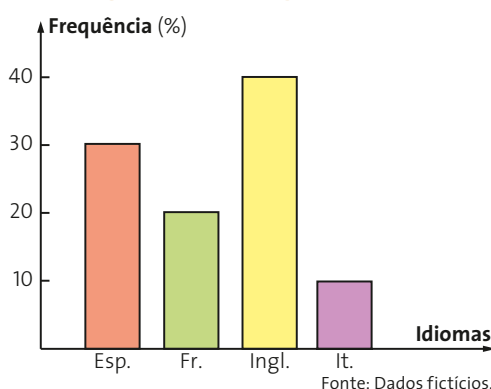
21. A temperatura máxima do dia em uma cidade foi anotada durante vinte dias e apresentou os seguintes dados:

30 °C; 32 °C; 31 °C; 31 °C; 33 °C; 28,5 °C; 33,5 °C; 27 °C; 30 °C; 34 °C; 30,5 °C; 28 °C; 30,5 °C; 29,5 °C; 26 °C; 31 °C; 31 °C; 29 °C; 32 °C; 31,5 °C.

Construa no caderno o histograma correspondente com os valores da variável em 5 intervalos.

22. Os quarenta alunos de uma classe optaram pelo estudo de uma língua estrangeira, entre espanhol, francês, inglês ou italiano. Analise o gráfico de barras ao lado, que registra as escolhas, e, a partir dele, construa no caderno a tabela de frequências e o gráfico de setores.

Porcentagem de alunos por idioma escolhido



3 Medidas de tendência central

A partir da idade das pessoas de um grupo, podemos estabelecer uma única idade que caracteriza o grupo todo. Considerando a temperatura de vários momentos em um mês qualquer, podemos determinar uma só temperatura que fornece uma ideia aproximada de todo o período. Avaliando as notas dos vários trabalhos de um aluno no bimestre, podemos registrar com apenas uma nota seu aproveitamento no bimestre.

Em situações como essas, o número obtido é a **medida da tendência central** dos vários números usados. A **média aritmética** é a mais conhecida entre as medidas de tendência central. Além dela, vamos estudar também a **mediana** e a **moda**.

Média aritmética (MA)

Considerando um grupo de pessoas com 22, 20, 21, 24 e 20 anos, efetuamos:

$$MA = \frac{22 + 20 + 21 + 24 + 20}{5} = \frac{107}{5} = 21,4$$

Dizemos, então, que a média aritmética, ou simplesmente a média de idade do grupo, é 21,4 anos.

Se, ao medir de hora em hora a temperatura em determinado local, registraram-se 14 °C às 6h, 15 °C às 7h, 15 °C às 8h, 18 °C às 9h, 20 °C às 10h e 23 °C às 11h, observamos que:

$$MA = \frac{14 + 15 + 15 + 18 + 20 + 23}{6} = \frac{105}{6} = 17,5$$

Dizemos, então, que no período das 6h às 11h a temperatura média foi 17,5 °C.

No caso de um aluno que realizou diversos trabalhos durante o bimestre e obteve as notas 7,5; 8,5; 10,0 e 7,0, observamos que:

$$MA = \frac{7,5 + 8,5 + 10,0 + 7,0}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$$

Dizemos, então, que nesse bimestre o aluno teve média 8,25.

Assim, generalizando, podemos afirmar que, dados os n valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de uma variável, a média aritmética é o número obtido da seguinte forma:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Fique atento!

O símbolo $\sum_{i=1}^n x_i$ significa o somatório dos números x_i , com i variando de 1 a n .

Média aritmética ponderada (MP)

Vejam, agora, o caso de um aluno que realiza vários trabalhos com pesos diferentes, isto é, com graus de importância diferentes. Se no decorrer do bimestre ele obteve 6,5 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 6,0 no debate (peso 1) e 7,0 no trabalho de equipe (peso 2), a sua média, que nesse caso é chamada **média aritmética ponderada**, será:

$$MP = \frac{2 \cdot 6,5 + 3 \cdot 7,0 + 1 \cdot 6,0 + 2 \cdot 7,0}{2 + 3 + 1 + 2} = \frac{13 + 21 + 6 + 14}{8} = \frac{54}{8} = 6,75$$

Quando calculamos a média aritmética de números que se repetem, podemos simplificar. Dessa maneira, para obter a média aritmética de 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 11 e 11, observamos que:

$$MA = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 11}{3 + 5 + 2} = \frac{21 + 45 + 22}{10} = \frac{88}{10} = 8,8$$

Dizemos, então, que 8,8 é a média aritmética dos números 7, 9 e 11, com frequências 3, 5 e 2, respectivamente. Observe que esse também é um exemplo de média ponderada, com os pesos sendo as frequências 3, 5 e 2.

A média aritmética é usada como medida de tendência central, ou seja, como forma de, por meio de um único número, dar uma ideia das características de determinado grupo de números. No entanto, é importante ressaltar que em algumas situações a presença de um valor bem maior ou bem menor do que os demais faz com que a média aritmética não consiga traçar o perfil correto do grupo.

Consideremos, por exemplo, um grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos. A média de idade, que é de 10 anos, não demonstra as características desse grupo em termos de idade. Em casos como esse são usadas outras medidas de tendência central, como a **mediana** e a **moda**, que estudaremos nas páginas seguintes.

Exercício resolvido

passo a passo: exercício 1

Resolvido passo a passo

1. (Uncisal) Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se a tabela apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os pesos dessas avaliações,

Avaliação	Nota	Peso
Prova escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

sua nota bimestral foi aproximadamente igual a:

- a) 8,6. b) 8,0. c) 7,5. d) 7,2. e) 6,8.

1. Lendo e compreendendo

- a) O que é dado no problema?

É dada uma tabela que apresenta as notas obtidas por uma aluna e o peso de cada uma dessas avaliações. Tais informações servem para o cálculo da nota bimestral.

- b) O que se pede?

Pede-se a nota bimestral da aluna.

2. Planejando a solução

As informações contidas no enunciado nos informam que se trata de um problema básico de média ponderada, a qual será baseada nas informações presentes na tabela.

O cálculo da média ponderada é realizado da seguinte forma:

$$\text{Média ponderada} = \frac{(\text{Peso 1} \times \text{Nota 1}) + (\text{Peso 2} \times \text{Nota 2}) + (\text{Peso 3} \times \text{Nota 3}) + (\text{Peso 4} \times \text{Nota 4})}{(\text{Peso 1} + \text{Peso 2} + \text{Peso 3} + \text{Peso 4})}$$

3. Executando o que foi planejado

$$\text{Média ponderada} = \text{Nota bimestral da aluna} = \frac{(4 \times 6) + (4 \times 7) + (2 \times 8) + (2 \times 9)}{(4 + 4 + 2 + 2)} = \frac{86}{12} \approx 7,2$$

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa d.

5. Ampliando o problema

- a) Devido a algumas mudanças na coordenação pedagógica da faculdade citada na questão-base, os pesos das avaliações foram modificados e passaram a ser termos de uma PA decrescente de $a_1 = 4$, correspondendo ao peso da prova escrita. Sendo assim, qual é o peso das avaliações: avaliação continuada, seminário e trabalho em grupo?

- b) *Discussão em equipe*

3, 2 e 1, respectivamente.

O que vocês acham do método de avaliação das escolas? [Resposta pessoal.](#)

Pontos a debater:

- É justo avaliar um aluno por sua nota?
- O que esse método tem de positivo e de negativo?
- Levantem hipóteses dos métodos de avaliação que poderiam ser considerados mais eficazes.

Mediana (Me)

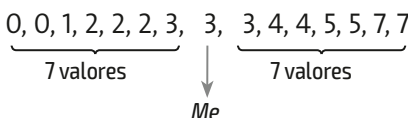
A presença de valores que destoem dos demais, por serem muito grandes ou muito pequenos, distorcem a média aritmética, fazendo com que ela não caracterize de forma eficiente o conjunto de valores. Por esse motivo é conveniente definirmos outra medida de tendência central, a **mediana**.

Assim, dados n números em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- o número que ocupar a posição central se n for ímpar;
- a média aritmética dos dois números que estiverem no centro se n for par.

Acompanhe alguns exemplos:

- a) Em uma classe, foram anotadas as faltas durante um período de 15 dias: 3, 5, 2, 0, 2, 1, 3, 4, 5, 7, 0, 2, 3, 4 e 7. Em ordem crescente, temos: 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7

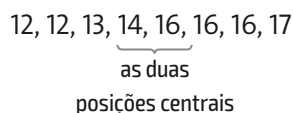


Como 15 é ímpar, o termo médio é o 8º.

Logo, a mediana é 3. Simbolicamente, $Me = 3$.

- b) As idades dos alunos de uma equipe são 12, 16, 14, 12, 13, 16, 16 e 17 anos.

Para determinar a mediana desses valores, colocamos inicialmente na ordem crescente (ou decrescente):



Como temos um número par de valores (8), fazemos a média aritmética entre os dois centrais, que são o 4º e o 5º termos. Logo, a mediana é dada por: $Me = \frac{14 + 16}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Simbolicamente, $Me = 15$ anos.

Moda (Mo)

Em uma pesquisa com um grupo de adolescentes, foi perguntado qual era o esporte preferido de cada um deles, entre futebol, natação, vôlei, basquete ou ciclismo. O resultado foi o seguinte: 14 preferiram futebol, 7 natação, 8 vôlei, 5 basquete e 4 ciclismo. Não seria conveniente querer identificar qual é a média desses resultados ou mesmo qual é a mediana, pois não se trata de resultados numéricos. Para isso, precisamos de uma medida de tendência central conveniente para variáveis qualitativas: a **moda**.

Em Estatística, moda é a medida de tendência central definida como o valor mais frequente de um grupo de valores observados. Dessa forma, a moda da situação anterior é “futebol” ($Mo = \text{futebol}$), com 14 ocorrências.

No exemplo do grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos, a moda é 2 anos ($Mo = 2$) e demonstra mais eficiência para caracterizar o grupo que a média aritmética.

Se a temperatura medida de hora em hora, das 6h às 11h, apresentou os resultados 14 °C, 15 °C, 15 °C, 18 °C, 20 °C e 25 °C, então dizemos que nesse período a moda foi 15 °C, ou seja, $Mo = 15$ °C.

No caso de um aluno que anotou, durante dez dias, o tempo gasto em minutos para ir de sua casa à escola e cujos registros foram 15 min, 14 min, 18 min, 15 min, 14 min, 25 min, 16 min, 15 min, 15 min e 16 min, a moda é 15 min, ou seja, $Mo = 15$ min.

Se as notas obtidas por um aluno foram 6,0; 7,5; 7,5; 5,0; e 6,0, dizemos que a moda é 6,0 e 7,5 e que a distribuição é **bimodal**.

Observação: Quando não há repetição de números, como para os números 7, 9, 4, 5 e 8, não há moda e a distribuição é chamada **amodal**.

Enfatize a importância da moda para variáveis qualitativas.

Para refletir

Como é uma distribuição trimodal de números?

É uma distribuição em que a moda se repete três vezes.

Média aritmética, moda e mediana a partir das tabelas de frequências

Utilizando os valores (números ou intervalos) e as frequências absolutas das tabelas de frequências das variáveis quantitativas, podemos calcular a *MA*, a *Mo* e a *Me* de seus valores.

Acompanhe alguns exemplos:

a) Frequências do número de irmãos de cada aluno de uma classe

Número de irmãos	0	1	2	3	Total
FA	8	15	12	5	40

Fonte: Dados fictícios.

Fique atento!

Embora 1,35 irmão aparentemente seja um absurdo, é correto um valor desse tipo, assim como 3,5 gols por partida; 7,2 medalhas por Olimpíada; etc., pois a média aritmética é uma medida de tendência.

Média aritmética:

$$MA = \frac{8 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{40} = \frac{0 + 15 + 24 + 15}{40} = \frac{54}{40} = 1,35$$

Moda:

A maior frequência é 15, que corresponde ao valor 1 irmão. Logo, $Mo = 1$ irmão.

Mediana:

Como o total de frequências é 40 (número par), os valores centrais são o 20º e o 21º:

$$\left(\frac{40}{2} = 20 \text{ e } 20 + 1 = 21\right).$$

Se colocados na ordem crescente, teremos os 8 valores correspondentes a 0 irmão, seguidos dos 15 valores de 1 irmão, e assim por diante. Então, o 20º e o 21º valores serão, ambos, 1 irmão. Logo, $Me = \frac{1+1}{2} = 1$.

b) Frequências de intervalos de "peso" de um grupo de pessoas

Peso (kg)	40 — 44	44 — 48	48 — 52	52 — 56	56 — 60	Total
FA	1	3	7	6	3	20

Fonte: Dados fictícios.

A partir da tabela em que os pesos estão agrupados em classes, consideramos, em cada classe, o seu valor médio (*VM*) e anexamos uma nova linha à tabela. Assim, temos:

$$44 - 40 = 48 - 44 = 52 - 48 = 56 - 52 = 60 - 56 = 4$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

Fique atento!

O cálculo da média de números inteiros inclui uma divisão que pode não ser exata.

$$40 + 2 = 42 \text{ (frequência 1)}$$

$$44 + 2 = 46 \text{ (frequência 3)}$$

$$48 + 2 = 50 \text{ (frequência 7)}$$

$$52 + 2 = 54 \text{ (frequência 6)}$$

$$56 + 2 = 58 \text{ (frequência 3)}$$

Valor médio de intervalos de "peso" de um grupo de pessoas

Peso (kg)	40 — 44	44 — 48	48 — 52	52 — 56	56 — 60
VM	42	46	50	54	58

Fonte: Dados fictícios.

Agora, podemos calcular *MA*, *Mo* e *Me* usando valores médios e suas frequências.

Média aritmética:

$$MA = \frac{1 \cdot 42 + 3 \cdot 46 + 7 \cdot 50 + 6 \cdot 54 + 3 \cdot 58}{20} = \frac{42 + 138 + 350 + 324 + 174}{20} = \frac{1\,028}{20} = 51,4$$

Assim, $MA = 51,4$ kg.

Moda:

A frequência maior, 7, indica o intervalo 48 — 52, representado por 50, que é o ponto médio.

Logo, $Mo = 50$ kg.

Mediana:

Como o total das frequências é 20 (número par), os dois valores centrais são o 10º e o 11º. Colocados os valores médios em ordem crescente e de acordo com suas frequências, o 10º é 50 kg e o 11º também. Logo,

$$Me = \frac{50 + 50}{2} = 50. \text{ Então, } Me = 50 \text{ kg.}$$

Exercícios



- 23.** Um time de futebol realizou algumas partidas e os resultados foram 3 a 1, 4 a 2, 1 a 1, 0 a 0, 3 a 2, 2 a 1 e 1 a 0. Sabendo que o time não perdeu nenhuma partida, calcule a média aritmética dos gols:
- a) marcados; **2** b) sofridos. **1**

- 24.** Se um aluno já fez dois trabalhos e obteve notas 8,5 e 5,0, qual deve ser a nota do terceiro trabalho para que a média aritmética dos três seja 7,0? **7,5**

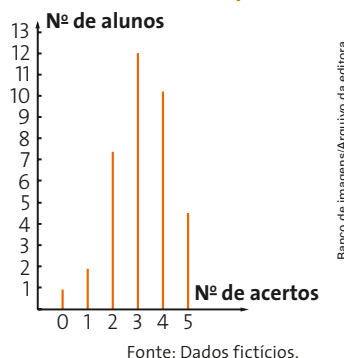
- 25.** Qual é a média de idade de um grupo em que há 6 pessoas de 14 anos, 9 de 20 anos e 5 de 16 anos? **17,2 anos.**

- 26.** De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, 14 e 14 reais. Determinem a média diária de gastos (MA) e a mediana (Me). **MA = 13 reais e Me = 13,5 reais**

- 27.** Considerando os números 126, 130, 126 e 102, calculem:
- a) a média aritmética (MA); **121**
- b) a média aritmética ponderada (MP), com pesos 2, 3, 1 e 2, respectivamente; **121,5**
- c) a mediana (Me); **126**
- d) a moda (Mo). **126**

- 28.** Uma prova com 5 questões foi aplicada em uma turma. O levantamento estatístico dos acertos foi registrado no gráfico abaixo:

Desempenho de uma turma em uma prova



Determinem a partir do gráfico:

- a) o número de alunos da turma; **40**
- b) a porcentagem da turma que acertou as 5 questões; **12,5%**
- c) a porcentagem da turma que acertou 3 ou mais questões; **72,5%**

- d) a MA, a Mo e a Me de acertos por pessoa.

$$MA = 3,15; Mo = 3; Me = 3$$

- 29.** Determinem a MA, a Mo e a Me a partir das tabelas de frequências. **MA = 14,3; Mo = 15; Me = 14,5**

a) Idade em um grupo de 10 pessoas

Idade (em anos)	13	14	15	16
FA	3	2	4	1

Fonte: Dados fictícios.

- b) **MA = 1,71; Mo = 1,67; Me = 1,71**

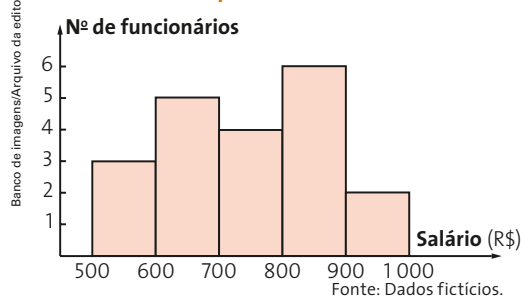
Altura em um grupo de 21 pessoas

Altura (m)	1,61—1,65	1,65—1,69	1,69—1,73	1,73—1,77	1,77—1,81
FA	3	6	5	4	3

Fonte: Dados fictícios.

- 30.** Usando os valores médios dos intervalos, construam o polígono do histograma abaixo e, depois, calculem a MA, a Mo e a Me. **MA = 745; Mo = 850; Me = 750**

Distribuição salarial dos funcionários de uma empresa



- 31.** Calcule a média aritmética ponderada de um aluno que obteve no bimestre 8,0 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 9,0 no debate (peso 1) e 5,0 no trabalho de equipe (peso 2). **7,0**

- 32.** A média das idades dos 11 funcionários de uma empresa era de 40 anos. Um dos funcionários se aposentou com 60 anos, saindo da empresa. A média de idade dos 10 funcionários restantes passou a ser:
- a) 40 anos. c) 38,9 anos. e) 37,8 anos.
- b) 39,8 anos. **x d) 38 anos.**

- 33.** Em sete jogos, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 4, 3 e 2 gols. Determine a média de gols por partida (MA) e a mediana (Me). **MA = 2,3 e Me = 2**

5.5 Medidas de Dispersão

Esta seção é baseada integralmente no livro do Dante, [2].

4 Medidas de dispersão

Já estudamos as medidas de tendência central mais usadas, como a média aritmética, a moda e a mediana. Elas têm como objetivo concentrar em um único número os diversos valores de uma variável quantitativa.

Neste item estudaremos casos em que as medidas de tendência central são insuficientes.

Vejam os a seguinte situação:

O critério de aprovação em um concurso estabelece que o candidato deve realizar 3 provas e obter, com suas notas, média igual ou maior do que 6,0. Nesse caso, a informação de que o candidato obteve média 7,5 é suficiente para concluir que ele está aprovado.

Consideremos agora outra situação:

Uma pessoa é encarregada de organizar atividades de lazer para um grupo de 6 pessoas e recebe a informação de que a média de idade do grupo é 20 anos. Nesse caso, apenas a informação da média não é suficiente para planejar as atividades, pois podemos ter grupos com média de idade de 20 anos e características totalmente diferentes.

Observemos alguns grupos possíveis:

- Grupo **A**: 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos.

$$MA = \frac{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

Logo, $MA = 20$ anos.

- Grupo **B**: 22 anos; 23 anos; 18 anos; 19 anos; 20 anos; 18 anos.

$$MA = \frac{22 + 23 + 18 + 19 + 20 + 18}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

Logo, $MA = 20$ anos.

- Grupo **C**: 6 anos; 62 anos; 39 anos; 4 anos; 8 anos; 1 ano.

$$MA = \frac{6 + 62 + 39 + 4 + 8 + 1}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

Logo, $MA = 20$ anos.

Como a medida de tendência central não é suficiente para caracterizar o grupo **C**, é conveniente utilizar medidas que expressem o grau de dispersão de um conjunto de dados. As mais usadas são a **variância** e o **desvio padrão**.

Variância (V)

A ideia básica de variância é tomar os desvios dos valores x_i em relação à média aritmética ($x_i - MA$). Mas a soma desses desvios é igual a 0 (por uma propriedade da média). Uma opção é considerar o total dos quadrados dos desvios $\sum_{i=1}^n (x_i - MA)^2$ e expressar a variância (V) como a média dos quadrados dos desvios, ou seja:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - MA)^2}{n}$$

Para refletir

Por que $\sum_{i=1}^n (x_i - MA) = 0$?

Porque essa é a propriedade das médias aritméticas.

Por exemplo, vamos descobrir a variância nos grupos **A**, **B** e **C** citados anteriormente:

- Grupo **A** (20; 20; 20; 20; 20; 20)

$$MA = 20$$

Desvios: $20 - 20 = 0$; todos iguais a 0.

$$V = 0$$

Quando todos os valores são iguais, dizemos que não houve dispersão e, por isso, a variância é 0.

- Grupo **B** (22; 23; 18; 19; 20; 18)

$$MA = 20$$

Desvios: $22 - 20 = 2$; $23 - 20 = 3$; $18 - 20 = -2$;

$19 - 20 = -1$; $20 - 20 = 0$; $18 - 20 = -2$

$$V = \frac{2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2}{6} = \frac{4 + 9 + 4 + 1 + 0 + 4}{6} = \frac{22}{6} \approx 3,6$$

Fique atento!

- No grupo **A** não houve dispersão.
- A dispersão no grupo **B** é menor do que no grupo **C**.
- Dizemos que o grupo **B** é mais homogêneo do que o **C** ou que o grupo **C** é mais heterogêneo do que o **B**.

- Grupo **C** (6; 62; 39; 4; 8; 1)

$$MA = 20$$

Desvios: $6 - 20 = -14$; $62 - 20 = 42$; $39 - 20 = 19$; $4 - 20 = -16$; $8 - 20 = -12$; $1 - 20 = -19$

$$V = \frac{(-14)^2 + 42^2 + 19^2 + (-16)^2 + (-12)^2 + (-19)^2}{6} = \frac{196 + 1764 + 361 + 256 + 144 + 361}{6} = \frac{3082}{6} \approx 513,6$$

A variância é suficiente para diferenciar a dispersão dos grupos: o grupo **A** não tem dispersão ($V = 0$) e o grupo **C** tem uma dispersão maior que a do grupo **B** ($513,6 > 3,6$).

Porém, não é possível expressar a variância na mesma unidade dos valores da variável, uma vez que os desvios são elevados ao quadrado. Então, definiu-se a medida de dispersão chamada **desvio padrão**.

Desvio padrão (DP)

O desvio padrão (DP) é a raiz quadrada da variância. Ele facilita a interpretação dos dados, pois é expresso na mesma unidade dos valores observados (do conjunto de dados).

No exemplo que estamos analisando, temos:

- Grupo **A**: $DP = \sqrt{0} = 0$ ano

- Grupo **B**: $DP = \sqrt{3,6} \approx 1,9$ ano

- Grupo **C**: $DP = \sqrt{513,6} \approx 22,6$ anos

Resumindo, se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são os n valores de uma variável quantitativa x , temos:

- a média aritmética dos valores de x : $MA = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

- a variância de x : $V = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - MA)^2}{n}$

- o desvio padrão de x : $DP = \sqrt{V}$

Fique atento!

A variância e o desvio padrão são números positivos ou nulos.

Observações:

1ª) Quando todos os valores da variável são iguais, o desvio padrão é 0.

2ª) Quanto mais próximo de 0 é o desvio padrão, mais homogênea é a distribuição dos valores da variável.

3ª) O desvio padrão é expresso na mesma unidade da variável.

Exercícios resolvidos

2. Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Vejamos as marcas obtidas por três atletas:

- atleta **A**: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm;
- atleta **B**: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm;
- atleta **C**: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

a) Qual deles obteve melhor média?

b) Qual deles foi o mais regular?

Resolução:

a) Calculando a média de cada atleta, obtemos:

$$\text{Atleta A: } MA = \frac{148 + 170 + 155 + 131}{4} = \frac{604}{4} = 151$$

$$\text{Atleta B: } MA = \frac{145 + 151 + 150 + 152}{4} = \frac{598}{4} = 149,5$$

$$\text{Atleta C: } MA = \frac{146 + 151 + 143 + 160}{4} = \frac{600}{4} = 150$$

Logo, o atleta **A** obteve a maior média, 151 cm.

b) A maior regularidade será verificada a partir do desvio padrão. Assim, temos:

Atleta **A**:

$$V = \frac{(148 - 151)^2 + (170 - 151)^2 + (155 - 151)^2 + (131 - 151)^2}{4} = \frac{9 + 361 + 16 + 400}{4} = \frac{786}{4} = 196,5$$

$$DP = \sqrt{196,5} \approx 14$$

Atleta **B**:

$$V = \frac{(-4,5)^2 + (1,5)^2 + (0,5)^2 + (2,5)^2}{4} = \frac{20,25 + 2,25 + 0,25 + 6,25}{4} = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$DP = \sqrt{7,25} \approx 2,7$$

Atleta **C**:

$$V = \frac{(-4)^2 + 1^2 + (-7)^2 + 10^2}{4} = \frac{16 + 1 + 49 + 100}{4} = \frac{166}{4} = 41,5$$

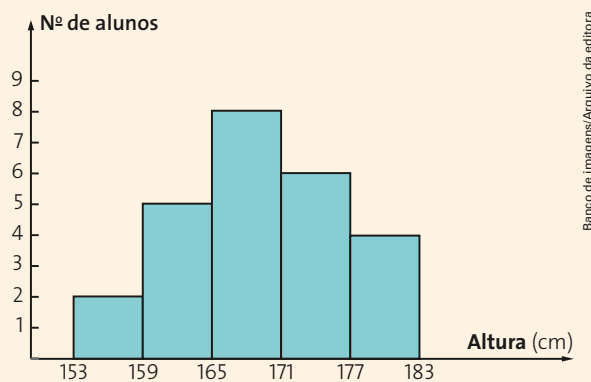
$$DP = \sqrt{41,5} \approx 6,4$$

Logo, o atleta **B** foi o mais regular, pois seu desvio padrão é o menor: aproximadamente 2,7 cm.

3. O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre altura (em centímetros) entre os alunos de uma turma. Calcule o desvio padrão dessa variável.



Distribuição da altura dos alunos de uma turma



Fonte: Dados fictícios.

Barco de imagens/Arquivo da editora

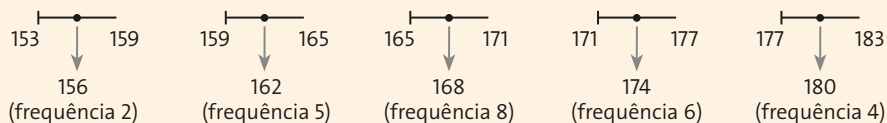
Para refletir

O desvio padrão pode ser igual à variância? E maior do que a variância?

Se a variância for 0 ou 1, o desvio padrão também será, respectivamente, 0 ou 1. E, se a variância pertencer ao intervalo (0, 1), então o desvio padrão será maior do que a variância.

Resolução:

No histograma, os valores da variável são intervalos e, por isso, vamos usar os seus pontos médios:



Média aritmética:

$$MA = \frac{2 \cdot 156 + 5 \cdot 162 + 8 \cdot 168 + 6 \cdot 174 + 4 \cdot 180}{2 + 5 + 8 + 6 + 4} =$$
$$= \frac{312 + 810 + 1344 + 1044 + 720}{25} = \frac{4230}{25} = 169,2$$

Desvios ($x_i - MA$):

$$156 - 169,2 = -13,2; 162 - 169,2 = -7,2; 168 - 169,2 = -1,2; 174 - 169,2 = 4,8; 180 - 169,2 = 10,8$$

Variância:

$$V = \frac{2(-13,2)^2 + 5(-7,2)^2 + 8(-1,2)^2 + 6(4,8)^2 + 4(10,8)^2}{25} =$$
$$= \frac{348,48 + 259,2 + 11,52 + 138,24 + 466,56}{25} = \frac{1224}{25} = 48,96$$

Fique atento!

No cálculo da variância foram usadas as frequências.

Desvio padrão: $DP = \sqrt{48,96} \approx 6,99$. Assim, o desvio padrão é de 6,99 cm.

Exercícios



34. Um concurso utiliza como nota a média e o desvio padrão de 3 provas. Calculem a média e o desvio padrão de um candidato que nas provas obteve, respectivamente, 63 pontos, 56 pontos e 64 pontos. **Média: 61; desvio padrão: 3,56**

35. Em uma classe as notas obtidas pelos alunos foram agrupadas da seguinte maneira:
 0 — 2 (1 aluno); 2 — 4 (6 alunos); 4 — 6 (9 alunos); 6 — 8 (8 alunos); 8 — 10 (6 alunos).

A partir desses dados: [Veja a resolução dos itens a e b no Manual do Professor.](#)

- construam no caderno o histograma;
- construam no caderno o polígono do histograma;
- calculem a média, a moda, a mediana e o desvio padrão. **$MA = 5,8$; $Mo = 5,0$; $Me = 5,0$; $DP \approx 2,46$**

36. Observem a tabela abaixo.



Distribuição dos salários de uma empresa

Salário (R\$)	Número de funcionários
1 000,00	10
1 500,00	5
2 000,00	1
2 500,00	10
5 500,00	4
11 000,00	1
Total	31

Fonte: Dados fictícios.

- Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa? **$MA = R\$ 2 500,00$ e $Me = R\$ 2 000,00$**
- Suponham que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R\$ 2 500,00 cada um. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior? **Menor.**

Referências Bibliográficas

- [1] L. R. Dante. Matemática: Contexto e aplicações. 2 edição, 2016.
- [2] L. R. Dante. Matemática: Contexto e aplicações. 3 edição, 2016.
- [3] G. Iezzi, S. Hazzan, and D. Degenszajn. Fundamentos de matemática elementar 11, matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva. 1 edição, 2019.
- [4] A. A. Neto. Matemática financeira e suas aplicações. 12 edição, 2012.